

Probabilités 3 – Probabilités classiques

Exercice 7 – Soit $n \geq 1$. La probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est $p_n = ap^n$, où $a \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement : la famille a n enfants. Alors :

$$\overline{A_0} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n,$$

ces événements étant deux à deux incompatibles. Ainsi :

$$P(\overline{A_0}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ap^n.$$

Cette série converge effectivement (série géométrique de raison $p \in [0, 1[$, et on trouve :

$$P(\overline{A_0}) = \frac{ap}{1-p}.$$

Puisque $P(\overline{A_0}) \leq 1$, on en déduit que $\frac{ap}{1-p} \leq 1$, puis que $ap \leq 1-p$, puis que $a+1 \leq \frac{1}{p}$.

2. Notons, pour tout $S \in \mathbb{N}$, B_S l'événement avoir S garçons.

Soit $S \in \mathbb{N}$.

On considère le système complet $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chacun de ces événements n'étant pas quasi-impossible. Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_S | A_n) P(A_n).$$

Or :

- si $n < S$, alors $P(B_S | A_n) = 0$;
- si $n \geq S$, le nombre de garçons suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Ainsi $P(B_S | A_n) = \binom{n}{S} \frac{1}{2^n}$.
(sans passer par les lois classiques : $\binom{n}{S}$ correspond au choix de la position des garçons dans la fratrie, et $\frac{1}{2}$ à la probabilité pour chaque enfant que ce soit une fille ou un garçon, tel que souhaité.)
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = ap^n$;
- $p(A_0) = 1 - \frac{ap}{1-p}$.

Ainsi :

- si $S = 0$:

$$P(B_0) = 1 - \frac{ap}{1-p} + a \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \binom{n}{0} \left(\frac{p}{2}\right)^n = 1 - \frac{ap}{1-p} + a \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{p}{2}\right)^n = 1 - \frac{ap}{1-p} + \frac{ap}{2-p} = 1 - \frac{ap}{(1-p)(2-p)}.$$

- Si $S > 0$:

$$P(B_S) = \sum_{n=S}^{+\infty} \binom{n}{S} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \left(\frac{p}{2}\right)^S \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+S}{S} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^S}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{S+1}} = \frac{2p^S}{(2-p)^{S+1}},$$

d'après la formule du binôme négatif (dérivation de la série géométrique).

Exercice 8 – Soit $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^n$. Un résultat de l'expérience correspond donc au n -uplet des valeurs tirées pour chaque dé, en supposant que l'on a numéroté les dés de 1 à n (ce que l'on peut toujours décider de faire, sans modifier la probabilité recherchée). N'ayant pas d'hypothèse sur les dés, on peut raisonnablement supposer qu'ils sont tous équilibrés, donc que tous les tirages de Ω sont équiprobables.

Soit Ω_1 l'ensemble des tirages de Ω donnant une somme impaire, et Ω_2 l'ensemble des tirages de Ω donnant une somme paire. Alors (Ω_1, Ω_2) forme une partition de Ω . De plus, il existe une bijection φ entre Ω_1 et Ω_2 donnée par :

$$\forall (x_1, \dots, x_6) \in \Omega_1, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_6) = \begin{cases} (x_1 + 1, x_2, \dots, x_6) & \text{si } x_1 \text{ est impair,} \\ (x_1 - 1, x_2, \dots, x_6) & \text{si } x_1 \text{ est pair} \end{cases}$$

(on remplace la valeur du premier dé respectivement par 2, 4 ou 6 si sa valeur initiale est 1, 3 ou 5, et inversement ; on change bien la parité de la somme ce faisant) Il s'agit bien d'une bijection, car en refaisant la même opération, on retombe sur le sextuplet initial (ce qui permet de construire une réciproque).

Ainsi, $|\Omega_1| = |\Omega_2|$, et $|\Omega_1| + |\Omega_2| = |\Omega|$. Donc $|\Omega_2| = \frac{1}{2}|\Omega|$. Ainsi, d'après la formule de Laplace, la probabilité d'obtenir une somme paire est :

$$p = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 11 – Exercice archi-classique (« la ruine du joueur »)

Remarquons que le total du capital de A et du capital de B reste fixe. Notons ce capital S .

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement A finit par être ruiné est ruiné, s'il dispose initialement d'une somme a (et donc B d'une somme $S - a = b$).

Soit S l'événement consistant en un succès pour A au premier tour. Ni S ni $\overline{S}$ n'est quasi-impossible. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_n) = P(A_n | S)P(S) + P(A_n | \overline{S})P(\overline{S}).$$

Or :

- Si S est réalisé, alors A dispose après une partie de $a + 1$ euros, et B de $b - 1$. Ainsi, si on oublie la première partie, le fait que A perde équivaut à la perte de A avec un montant initial de $a + 1$ (et donc $b = S - a - 1 = b - 1$, puisqu'on fixe la somme totale). Ainsi :

$$P(A_n | S) = P(A_{n+1}).$$

- De même, si S n'est pas réalisé, A se retrouve avec $a - 1$ euros après la première partie, et par conséquent :

$$P(A_n | \overline{S}) = P(A_{n-1}).$$

On en déduit que :

$$\forall a \in \llbracket 1, S - 1 \rrbracket, \quad P(A_n) = pP(A_{n+1}) + (1 - p)P(A_{n-1}).$$

En supposant que $p \neq 0$ (sinon, A perd presque sûrement !), et en notant $u_a = P(A_n)$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\forall a \in \llbracket 1, S - 1 \rrbracket, \quad u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a + \left(1 - \frac{1}{p}\right)u_{a-1},$$

avec les conditions aux bords : $u_0 = 1$ (A perd forcément s'il dispose d'un capital nul, c'est la condition d'arrêt du jeu !) et $u_S = 0$ (A gagne forcément si B dispose d'un capital nul).

On reconnaît une suite récurrente d'ordre 2, de polynôme caractéristique :

$$P = pX^2 - X + (1 - p) = (X - 1)(pX - (1 - p)).$$

- **Premier cas :** $\frac{1-p}{p} = 1$, c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet une racine double réelle égale à 1. On sait que dans ce cas, il existe des réels λ et μ tels que pour tout $a \in \llbracket 1, S \rrbracket$,

$$u_a = (\lambda + \mu a)1^a.$$

Les conditions aux bords donne : $u_0 = 1 = \lambda$ et $u_S = 0 = \lambda + \mu S$. Ainsi, $\lambda = 1$ et $\mu = -\frac{1}{S}$, d'où :

$$\forall a \in \llbracket 1, S \rrbracket, \quad u_a = 1 - \frac{a}{a + b} = \frac{b}{a + b}$$

La limite lorsque b tend vers $+\infty$ est 1 : plus le capital du joueur adverse est important, moins on a de chance de gagner. Si le jeu est équilibré, mieux vaut donc être riche !

De plus, le problème étant symétrique en a et b , on trouve de même la probabilité que B perde, égale à $\frac{a}{a+b}$. La somme de ces deux probabilités étant égale à 1, on en déduit que l'événement : « un des deux joueurs finit par gagner », c'est-à-dire « la partie s'arrête », est quasi-certain.

• **Deuxième cas :** $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet deux racines simples réelles 1 et $\frac{1-p}{p}$. Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall a \in \llbracket 0, S \rrbracket, \quad u_a = \lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p} \right)^a.$$

Les conditions aux bords amènent : $u_0 = 1 = \lambda + \mu$ et $u_S = 0 = \lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p} \right)^S$. Ainsi,

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^S} = \frac{p^S}{p^S - (1-p)^S} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{-(1-p)^S}{p^S - (1-p)^S}.$$

On obtient donc, pour tout $a \in \llbracket 0, S \rrbracket$:

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{-(1-p)^{a+b}}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} + \frac{p^{a+b}}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} \cdot \left(\frac{1-p}{p} \right)^a \\ &= \frac{-(1-p)^{a+b}}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} + \frac{p^b(1-p)^a}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} = \frac{(1-p)^a(p^b - (1-p)^b)}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^a \left(1 - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^b \right)}{1 - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{a+b}} \end{aligned}$$

Pour calculer la limite de cette expression lorsque b tend vers $+\infty$ (à a fixé), on distingue deux cas :

* si $0 < \frac{1}{p} - 1 < 1$, donc si $p \in]0, \frac{1}{2}[$, alors, les limites de $\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^b$ et $\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{a+b}$ lorsque b tend vers $+\infty$ sont nulles, donc

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} u_a = \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^a.$$

Ainsi, un jeu favorisant A peut lui permettre de gagner (avec une probabilité non nulle) face à un joueur richissime. Et même, cette probabilité de gagner ne dépend pas du capital de B , mais uniquement du capital de A (plus ce capital est important, plus u_a est petit, donc plus la probabilité de gagner de A est grande ; c'est assez logique). Par exemple, si le jeu est déséquilibré $\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{3}$ en faveur de A , et si A dispose au départ de 10 euros, il a 1023 chances sur 1024 de gagner, même si B dispose d'une fortune immense !

* si $p \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors :

$$1 - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^b \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^b \quad \text{et} \quad 1 - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{a+b} \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^{a+b}.$$

Par conséquent, la limite de u_a est 1. Ce n'est pas très étonnant : si B est richissime, et que le jeu l'avantage, c'est normal qu'il gagne !

Enfin, le jeu étant symétrique, il suffit d'inverser le rôle de a et b , ainsi que de p et $1-p$, pour obtenir la probabilité v_b de perte de B :

$$v_b = \frac{p^b(p^a - (1-p)^a)}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}}.$$

On obtient donc :

$$u_a + v_b = \frac{(1-p)^a(p^b - (1-p)^b)}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} + \frac{p^b(p^a - (1-p)^a)}{p^{a+b} - (1-p)^{a+b}} = 1.$$

Exercice 12 – Notons p la probabilité qu'il ne fume pas le premier jour (c'est, disons, la probabilité qu'il ne fume pas un jour avant de s'arrêter de fumer, malheureusement probablement égale à 0 ; ses bonnes résolutions commencent alors le deuxième jour).

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « le fumeur ne fume pas le n -ième jour, et notons $p_n = P(A_n)$. L'énoncé nous dit ce qu'il se passe un jour sachant ce qu'il s'est passé un jour précédent (donc en faisant une discussion sur un découpage de Ω selon un certain système complet).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons donc utiliser la formule des probabilités totales sur le système complet $(A_n, \overline{A_n})$. Ainsi :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} | \overline{A_n})P(\overline{A_n}) = 0.3p_n + 0.9(1 - p_n) = 0.9 - 0.6p_n.$$

Ainsi, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 10p_{n+1} = 9 - 6p_n.$$

Il s'agit donc d'une suite arithmético-géométrique. Soit $c \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = p_n - c$. Cherchons c de sorte que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 10a_{n+1} = 10p_{n+1} - 10c = 9 - 6p_n - c = 9 - 6a_n - 6c - 10c = -6a_n + 9 - 16c.$$

Il suffit donc de prendre $c = \frac{9}{16}$. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = -\frac{3}{5}a_n, \text{ donc: } a_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1} a_1 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left(p - \frac{9}{16}\right).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left(p - \frac{9}{16}\right) + \frac{9}{16} \quad \text{puis:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{9}{16}.$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements :

- B : « la personne arrive à s'arrêter de fumer » ;
- B_n « A partir du n -ième jour (et peut-être avant), la personne ne fume plus » ;
- pour tout $m \geq n$, $B_{n,m}$: « la personne ne fume par entre les jours n et m inclus ».

Ainsi :

- $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, et la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (si elle ne fume plus à partir du n -ième jour, alors c'est vrai aussi à partir du $n+1$ -ième jour, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \subset B_{n+1}$) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcap_{m \geq n} B_{n,m}$, et la suite $(B_{n,m})_{m \geq n}$ est décroissante.

Nous allons donc utiliser le théorème de la limite monotone une première fois pour déterminer $P(B_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis une deuxième fois pour déterminer $P(B)$.

Commençons donc par déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \geq n$, la probabilité de $B_{n,m}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$, et $m \geq n$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_{n,m}) = P(A_n \cap A_{n+1} \cap \dots \cap A_m) = P(A_n) \prod_{i=1}^m P(A_{n+i} \mid A_n \cap \dots \cap A_{n+i-1}) = P(A_n) \prod_{i=1}^m P(A_{n+i} \mid A_{n+i-1}),$$

car le fait de fumer un jour donné ne dépend que de ce qu'il s'est passé la veille, et non des jours précédents. Or, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $P(A_{n+i} \mid A_{n+i-1}) = \frac{3}{10}$ d'après l'énoncé. Ainsi :

$$P(B_{n,m}) = P(A_n) \left(\frac{3}{10}\right)^n.$$

D'après la propriété des limites monotones, on obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(B_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(B_{n,m}) = 0, \quad \text{puis:} \quad P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0.$$

Ainsi, il est presque certain que ce fumeur ne cessera pas de fumer. Il lui faut donc pour cela prendre des résolutions beaucoup plus fortes que celles-ci !

Exercice 14 – Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

1. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. De plus, A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ainsi, $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, donc A ou B est presque-impossible.
2. Supposons A presque-impossible (même raisonnement pour B). Alors on a toujours $P(A) = 0$, donc $P(A)P(B) = 0$, et comme $A \cap B \subset A$, $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, donc $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants.

En revanche, il n'y a aucune raison pour que A et B soient incompatibles. Il suffit de prendre pour A n'importe quel événement quasi-impossible et non impossible (un tirage infini de faces par exemple), et pour B l'univers Ω . Alors $A \cap B \neq \emptyset$, donc A et B ne sont pas incompatibles (mais seulement « presque-incompatibles »).

3. Si A est incompatible avec lui-même, alors $A \cap A = \emptyset$, donc $A = \emptyset$. Le seul événement incompatible avec lui-même est donc l'événement impossible.

Si A est indépendant de lui-même, alors $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$. Par conséquent, $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. On en déduit que A est quasi-certain ou presque-impossible.

Réciproquement, les événements quasi-certains ou presque-impossibles vérifient clairement la bonne relation pour être indépendant d'eux-même.