

**Devoir Maison n° 10 – Valeurs propres, diagonalisation**

**Exercice 1 –**

1. Les deux matrices suivantes sont-elles diagonalisables? Si oui, les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies par  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ ,  $w_0 = 2$ ,  $t_0 = 3$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n - 2w_n + t_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2w_n + t_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n - w_n + 2t_n \\ t_{n+1} = 4u_n - 4v_n - 4w_n + 5t_n \end{cases}$$

Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$ ,  $t_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 2 –**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à  $A$ .

(a)  $A$  est-elle diagonalisable?

(b) Déterminer des bases de  $\text{Ker}(f - \text{id})$ ,  $\text{Ker}(f - \text{id})^2$  et  $\text{Ker}(f - \text{id})^3$ .

(c) Déterminer une base de  $\mathbb{R}^4$  dans laquelle la matrice de  $f$  est :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) Calculer  $M^n$ , puis  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 3$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = 2u_{n+3} - 2u_{n+1} + u_n.$$

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une relation entre  $U_n$ ,  $U_{n+1}$  et  $A$ .

(b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par une récurrence linéaire d'ordre  $p$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n.$$

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$ .

(a) Trouver une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .

(b) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique de la relation de récurrence.

(c) Retrouver le résultat concernant l'expression des suites définies par une relation de récurrence dont le polynôme caractéristique admet des racines deux à deux distinctes.

## Problème – (Étude de sous-espaces stables par un endomorphisme)

L'objet de problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel  $n$  non nul, et on note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ . On note  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ , et  $\text{Id}_E$  l'endomorphisme identité de  $E$ . On dira qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est **stable** par un endomorphisme  $f$  de  $E$  (ou que  $f$  laisse stable  $F$ ) si l'inclusion  $f(F) \subset F$  est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à  $\{0_E\}$  et  $E$  lui-même sont stables par tout endomorphisme de  $E$ .

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel  $k$ , on note  $\mathbb{R}_k[X]$  le sous-espace vectoriel formé par les éléments de  $\mathbb{R}[X]$  qui sont de degré inférieur ou égal à  $k$ .

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , on pose  $f^0 = \text{Id}_E$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ ,  $f^3 = f \circ f \circ f$ , etc.

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , et si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$ , on rappelle qu'on note  $P(f)$  l'endomorphisme de  $E$  égal à  $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k$ .

### Partie I – Préliminaire.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } P(f)$  est stable par  $f$ .
2. (a) Montrer que les droites de  $E$  stables par  $f$  sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme  $f$ .  
(b) On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer (en en donnant une base) les droites de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $g$ .

3. Soit  $p$  un entier naturel non nul.
  - (a) Si  $F_1, \dots, F_p$  sont  $p$  sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ , montrer qu'alors la somme  $\sum_{k=1}^p$  est un sous-espace vectoriel stable par  $f$ .
  - (b) Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont  $p$  valeurs propres de  $f$ , et si  $n_1, \dots, n_p$  sont  $p$  entiers naturels, montrer qu'alors la somme  $\sum_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{n_k}$  est stable par  $f$ .
4. (a) Soit  $\lambda$  un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par un endomorphisme  $f$  sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme  $f - \lambda \text{Id}_E$ .  
(b) Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme  $f$  et ceux qui sont stables par l'endomorphisme  $f^2$ ? (justifier toute implication ou non-implication!)  
(c) Quel lien y a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme  $f$  et ceux qui sont stables par l'endomorphisme  $f^{-1}$ ?  
(d) Que dire d'un endomorphisme de  $E$  laissant stable tout sous-espace vectoriel de  $E$ ? (pensez à un exercice fait en TD...)  
(e) Donner un exemple d'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace  $\mathbb{R}^2$ .
5. (a) Montrer que les hyperplans de  $E$  sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur  $E$ .  
(b) Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$ , et  $H = \text{Ker } \varphi$ .
  - i. Montrer que l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si et seulement si il existe un élément  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$  vérifiant l'égalité :  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$ .
  - ii. On note  $A$  la matrice de  $f$  relativement à la base canonique de  $E$ , et  $L$  la matrice (ligne) de  $\varphi$  relativement aux bases canoniques de  $E$  et de  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que l'hyperplan  $H$  est stable par  $f$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  vérifiant l'égalité :  ${}^t A {}^t L = \lambda {}^t L$ .

**Partie II – Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable.**

*Dans cette partie, on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  diagonalisable, et on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres distinctes, et  $E_1, \dots, E_p$  les sous-espaces propres correspondants.*

1. Que dire des sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$  si  $p = 1$  ?
2. On suppose l'entier  $p$  au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par  $f$ , et un élément  $x$  de  $F$ .
  - (a) Justifier l'existence d'un unique élément  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $\prod_{k=1}^p E_k$  vérifiant l'égalité  $x = \sum_{k=1}^p x_k$ .
  - (b) Montrer que le vecteur  $\sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1)x_k$  est élément de  $F$ .
  - (c) Montrer que les vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  sont tous dans  $F$ .
3. Dédurre de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$  sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme  $\sum_{k=1}^p F_k$  où, pour tout entier  $k$  vérifiant les inégalités  $1 \leq k \leq p$ ,  $F_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E_k$ .
4. Montrer que l'endomorphisme induit par  $f$  sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables  $F$  est un endomorphisme diagonalisable de  $F$ .
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de  $f$  pour que  $E$  possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par  $f$ . Quel est alors ce nombre ?

**Partie III – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre  $n$ .**

1. On note  $D$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  qui à tout polynôme  $P$  associe son polynôme dérivé  $P'$ .
  - (a) Déterminer les valeurs propres de  $D$ . L'endomorphisme  $D$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Vérifier que  $D^n$  est l'endomorphisme nul, et que  $D^{n-1}$  ne l'est pas.
  - (c) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  stables par  $D$  sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les  $n$  sous-espaces vectoriels suivants :  $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .
2. On considère un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'ordre  $n$ , c'est-à-dire vérifiant les conditions :  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .
  - (a) Établir qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $A$  de  $f$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$  est donc la matrice dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) vaut 1 si  $j = i + 1$ , et 0 sinon.

- (b) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B$  suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B$  est donc la matrice dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) vaut  $i$  si  $j = i + 1$ , et 0 sinon.

- (c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ . (Faites le rapprochement entre la question (2b) et la question 1.)

**Partie IV – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2**

Dans cette partie, on considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  nilpotent d'ordre 2, c'est-à-dire un endomorphisme non nul de  $E$  tel que  $f \circ f$  est l'endomorphisme nul.

1. On considère un sous-espace vectoriel  $F_2$  de  $E$ , vérifiant  $F_2 \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$ .
  - (a) Justifier l'inclusion :  $f(F_2) \subset \text{Ker } f$ .
  - (b) On considère de plus un sous-espace vectoriel  $F_1$  de  $\text{Ker } f$  contenant  $f(F_2)$ . Montrer que la somme  $F_1 + F_2$  est directe et que c'est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ .
  - (c) Étant donné  $A, B, C$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ , établir l'inclusion :  $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$ .  
A-t-on nécessairement l'égalité ?
  - (d) Déterminer l'intersection  $(F_1 + F_2) \cap \text{Ker } f$ .
2. Réciproquement, on considère un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par  $f$ . On pose  $F_1 = F \cap \text{Ker } f$  et on considère un sous-espace vectoriel  $F_2$  supplémentaire de  $F_1$  dans  $F$ .  
Vérifier l'inclusion  $f(F) \subset \text{Ker } f$ , et prouver que l'intersection  $F_2 \cap \text{Ker } f$  est réduite au vecteur nul.
3. **Dans cette question**, on suppose que l'entier  $n$  est égal à 4 ( i.e.  $E = \mathbb{R}^4$ ) et on considère l'endomorphisme  $h$  de  $E$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  est la matrice  $M$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que les sous-espaces vectoriels  $G_1 = \text{Ker}(h - \text{Id})^2$  et  $G_2 = \text{Ker}(h - 2\text{Id})^2$  sont supplémentaires.
- (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par  $H$  sont exactement les sommes  $H_1 + H_2$ , où  $H_1$  et  $H_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $G_1$  et de  $G_2$  stables par  $h$ .
- (c) Déterminer (en en donnant une base) les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $h$ .

**Partie V – Existence d'un plan stable par un endomorphisme**

Soit  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$ .

1. Justifier l'existence d'un polynôme non nul à coefficients réels annulant  $f$ .  
On note  $M$  un polynôme non nul à coefficients réels de degré minimal annulant  $f$ . On observera que  $M$  n'est pas constant
2. Dans cette question, on suppose que le polynôme  $M$  n'a pas de racine réelle, et on note  $z$  l'une de ses racines complexes.
  - (a) Vérifier que le conjugué de  $z$  est aussi racine de  $M$  et en déduire qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels noté  $X^2 + bX + c$  qui divise  $M$ .
  - (b) Montrer que l'endomorphisme  $f^2 + bf + c\text{Id}_E$  n'est pas injectif.
  - (c) En déduire qu'il existe un plan de  $E$  stable par  $f$ .
3. Dans cette question, on suppose qu'il existe un réel  $\lambda$ , un réel  $\alpha$  non nul et un entier  $p$  au moins égal à 2 vérifiant l'égalité :  $M = \alpha(X - \lambda)^p$ . On pose  $g = f - \lambda\text{Id}_E$ .
  - (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que la famille  $(x, g(x), \dots, g^{(p-1)}(x))$  est libre.
  - (b) En déduire qu'il existe un plan de  $E$  stable par  $f$ .
4. Montrer que, dans tous les cas, il existe un plan de  $E$  stable par  $f$ .