Devoir Maison n° 13 – Paradoxe de Walter Penney

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Pour tout entier naturel non nul n , on note par R_n l'événement « pile apparaît au lancer de rang n », et par S_n l'événement « face apparaît au lancer de rang n »

PARTIE I – Un résultat utile

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier naturel non nul n , on pose $a_n = P[X = n]$.

1. (a) Justifier que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.
- (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum a_n x^n$ converge.
2. On désigne par f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que cette fonction est dérivable en 1. Elle vérifie donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1)$.

- (a) Établir, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$, l'égalité : $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$.
- (b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0, 1[$, et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de $[0, 1[$: $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1)$.
- (c) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1)$. En déduire que $\sum n a_n$ converge.
- (d) À l'aide des résultats des questions (2a) et (2c), justifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$, on a les inégalités suivantes : $0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$.
- (e) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance donnée par : $E(X) = f'(1)$.

PARTIE II – Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un « face » précédé de deux « pile », si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si elle n'apparaît jamais.

Par exemple, si les premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9. On pose $c_1 = c_2 = 0$, et, pour tout entier $n \geq 3$: $c_n = P[Y = n]$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on note B_n et U_n les événements $B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n$ et $U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$.

1. On pose $u_1 = u_2 = 0$, et pour tout entier $n \geq 3$: $u_n = P(U_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

2. (a) Soit $n \geq 3$. Quelle est la probabilité de B_n ?
 (b) Vérifier que pour tout $n \geq 3$, les événements B_n , B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
 (c) Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 5.
 (a) Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$, et préciser leur probabilité.
 (b) Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1} , et en déduire que : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Vérifier que cette relation est aussi vérifiée pour $n = 3$ et $n = 4$.
 (c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Quelle est la probabilité de l'événement $[Y = 0]$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 (a) Préciser les nombres v_1, v_2, v_3, v_4 .
 (b) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 (c) En déduire, pour tout entier $N \geq 1$, l'égalité suivante : $\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$.
 (d) Montrer que la série $\sum v_n$ converge, et calculer sa somme.
5. Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n.$$

- (a) Montrer que h est croissante, et que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1).$$

En déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = h(1)$.

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $c_n = v_{n-1} - v_n$.
 (c) Établir, pour tout réel $x \in [0, 1]$, l'égalité : $g(x) = (x - 1)h(x) + x$.
 (d) Montrer que g est dérivable en 1, et montrer que Y admet une espérance, égale à 8.

PARTIE III – Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment, avec la règle suivante :

- le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J .

1. Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un « pile » précédé d'un « pile » lui-même précédé d'un « face », si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît jamais. Par exemple, si les premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y' prend la valeur 6.

Pour tout entier $n \geq 3$, on désigne par B'_n l'événement $S_{n-2} \cap R_{n-1} \cap R_n$, par U'_n l'événement $\bigcup_{i=3}^n B'_i$, et on note $u'_n = P(U'_n)$.

- (a) Soit $n \geq 3$. Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont-ils deux à deux incompatibles ?
- (b) En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont égales, puis que Y et Y' suivent la même loi et ont même espérance.
2. Pour tout entier $n \geq 3$, on note G_n l'événement : « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n », et g_n la probabilité de G_n .
- (a) Calculer g_3 et g_4 . Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- (b) En déduire la probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaisse jamais deux « pile » consécutifs.
- (a) Préciser d_1 et d_2 , et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.
- (b) Écrire un programme en PASCAL demandant un entier n à l'utilisateur, calculant et affichant d_n . On ne se servira pas d'une formule explicite de d_n .
- (c) En explicitant d_n en fonction de n , montrer que $\sum d_n$ converge. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.
4. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.
- (a) Justifier, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité : $P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$. En déduire $P[T = n]$ en fonction de d_n et d_{n-1} .
- (b) Montrer que l'événement « L'un des deux joueurs est déclaré gagnant » est presque-certain.
5. Calculer la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant. Conclusion ?
6. Si la configuration gagnante du joueur J avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et celle du joueur J' « face, face, pile, face, face, pile », quelle aurait été la conclusion ?
7. Soit, pour tout $x \in [0, 1]$, $d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ et $t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[T = n] x^n$.
- (a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} d(x) = d(1)$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $t(x) = (x - 1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2 - x)} \right) + x$.
- (c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance ; préciser $E(T)$.

PARTIE IV – Simulation informatique

On rappelle qu'en PASCAL, l'instruction `random(2)` a pour effet de donner aléatoirement la valeur 0 ou la valeur 1, de manière équiprobable. On considère le programme donné en page 4.

- Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables x , y et k lors de l'exécution de ce programme, si les valeurs données à la variable r par la fonction `random(2)` sont successivement :
 - 1,1,1,1,0
 - 1,0,1,0,0,0,1,1
 - 0,1,0,1,0,1,1
- Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable k , et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?
Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?

```
program Quigagne;
var x,y,r,k:integer;
begin
  x:=0;
  y:=0;
  k:=0;
  while (x<3) and (y<3) do
    begin
      k:=k+1;
      r:=random(2);
      if r=1 then
        begin
          if x>=1 then x:=2 else x:=1;
          if y>=1 then y:=y+1;
        end
      else
        begin
          if x=2 then x:=3 else x:=0;
          y:=1;
        end;
      end;
    if x=3 then write('...') else write('...');
  end.
```