

Devoir Maison n° 2 – Ensembles, applications

Problème 1 – Images directes et images réciproques de parties

Soit E et E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application.

1. Montrer que pour tous A, B de $\mathcal{P}(E)$:
 - (a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$;
 - (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
 - (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est injective
 - (ii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
 - (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\mathbb{C}_E A) \subset \mathbb{C}_{E'} f(A)$.
3. Montrer, pour tous A', B' de $\mathcal{P}(E')$:
 - (a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
 - (b) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
 - (c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
 - (d) $f^{-1}(\mathbb{C}_{E'} A') = \mathbb{C}_E f^{-1}(A')$
 - (e) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$ (on rappelle que $E - F = E \setminus E \cap F$).
4. (a) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
 (b) Établir que f est injective si et seulement si : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
5. (a) Montrer que : $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f(f^{-1}(A')) \subset A'$.
 (b) Établir que f est surjective si et seulement si : $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f(f^{-1}(A')) = A'$.
6. (a) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.
 (b) Montrer que : $\forall A' \in \mathcal{P}(E'), f^{-1}(f(f^{-1}(A'))) = f^{-1}(A')$.
7. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall A' \in \mathcal{P}(E'), f(A \cap f^{-1}(A')) = f(A) \cap A'$.
8. Soit G un ensemble et $g : F \longrightarrow G$ une application. Vérifier :
 - (a) $\forall A \in \mathcal{P}(E), (g \circ f)(A) = g(f(A))$
 - (b) $\forall A'' \in \mathcal{P}(G), (g \circ f)^{-1}(A'') = f^{-1}(g^{-1}(A''))$.

Problème 2 – Généralisation des notions d'injectivité et de surjectivité à des relations quelconques

Soit E et F deux ensembles, et $\mathcal{R}$ une relation de E vers F . Autrement dit, $\mathcal{R}$ est la donnée d'un sous-ensemble G de $E \times F$, et on dit que $x \in E$ et $y \in F$ sont en relation si $(x, y) \in G$. On note dans ce cas $x\mathcal{R}y$.

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout $L \in \mathcal{P}(F)$, on définit :

$$\mathcal{R}^+(A) = \{y \in F, \exists a \in A, a\mathcal{R}y\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^-(L) = \{x \in E, \exists \ell \in L, x\mathcal{R}\ell\}$$

Ainsi, $\mathcal{R}^+(A)$ est le sous-ensemble de F constitué des éléments qui sont en relation avec un élément de A , alors que $\mathcal{R}^-(F)$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont en relation avec un élément de L .

1. Prouver que pour tous sous-ensembles A et B de E :
 - (a) $A \subset B \implies \mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)$;

$$(b) \mathcal{R}^+(A \cup B) = \mathcal{R}^+(A) \cup \mathcal{R}^+(B);$$

$$(c) \mathcal{R}^+(A \cap B) \subset \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B).$$

2. Prouver que pour tous sous-ensembles L et M de F :

$$(a) L \subset M \implies \mathcal{R}^-(L) \subset \mathcal{R}^-(M);$$

$$(b) \mathcal{R}^+(L \cup M) = \mathcal{R}^-(L) \cup \mathcal{R}^-(M);$$

$$(c) \mathcal{R}^+(L \cap M) \subset \mathcal{R}^-(L) \cap \mathcal{R}^-(M).$$

(On pourra soit refaire tous les raisonnements, soit se ramener au cas précédent, en considérant la relation $\mathcal{R}^{-1}$ de F vers E définie, pour tout $y \in F$ et tout $x \in E$ par : $y\mathcal{R}^{-1}x$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.)

3. On définit quatre types particuliers de relations de E vers F :

- On dit que $\mathcal{R}$ est de type 1 si tout élément de E est en relation par $\mathcal{R}$ avec au plus un élément de F .
 - On dit que $\mathcal{R}$ est de type 2 si tout élément de E est en relation par $\mathcal{R}$ avec au moins un élément de F .
 - On dit que $\mathcal{R}$ est de type 3 si tout élément de F est en relation par $\mathcal{R}$ avec au plus un élément de E .
 - On dit que $\mathcal{R}$ est de type 4 si tout élément de F est en relation par $\mathcal{R}$ avec au moins un élément de E .
- On définit de plus la composée de deux relations $\mathcal{R}$ de E vers F et $\mathcal{S}$ de F vers H comme étant la relation $\mathcal{T}$ de E vers H définie par :

$$\forall x \in E, \forall z \in H, (x\mathcal{T}z \iff (\exists y \in F, (x\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{S}z))).$$

(a) Que pouvez-vous dire d'une relation qui soit à la fois de type 1 et de type 2 ?

(b) On suppose que $\mathcal{R}$ est une relation définissant une application $f : E \longrightarrow F$. Que pouvez-vous dire de f si $\mathcal{R}$ est de type 3 ? de type 4 ?

(c) Justifier que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définissent deux applications f et g , alors la composée $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est la relation associée à l'application $g \circ f$.

(d) Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations de même type i , $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Montrer que la composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est encore de même type.

4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{R}$ est du type 3
- (ii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \mathcal{R}^+(A \cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$
- (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$
- (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathcal{R}^+(\mathbb{C}_E A) \subset \mathbb{C}_F(\mathcal{R}^+(A))$.

Donner de même une liste de propriétés équivalentes à : $\mathcal{R}$ est du type 1.

(On pourra considérer $\mathcal{R}^{-1}$ définie dans la question 2).

5. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{R}$ est du type 4
- (ii) $\mathcal{R}^+(E) = F$
- (iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F), L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$
- (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathbb{C}_F(\mathcal{R}^+(A)) \subset \mathcal{R}^+(\mathbb{C}_E(A))$.

Donner de même une liste de propriétés équivalentes à : $\mathcal{R}$ est du type 2.

6. Soit $\hat{E}$ l'ensemble des relations de E vers E . On munit $\hat{E}$ d'une relation $\leq$ définie par :

$$\forall \mathcal{R}, \mathcal{S} \in \hat{E}, \mathcal{R} \leq \mathcal{S} \iff (\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y)).$$

(a) Vérifier que $\leq$ est un ordre sur $\hat{E}$.

(b) On note Id_E l'application identique de E dans E . Montrer que $\mathcal{R}$ est du type 1 si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leq \text{Id}_E$, où $\mathcal{R}^{-1}$ est la relation définie dans la question 2.

(c) Caractériser de façon analogue les trois autres types.

(d) Montrer que $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \text{Id}_E$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est une application bijective.