Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le vendredi 13 octobre 2006

Devoir Maison n° 3 – Suites

Exercice 1 –

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente de limite a, strictement positive, alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geqslant \frac{a}{2}$.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x(1-x)$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

2. Étudier les variations de f.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.
4. On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}.$$
En déduire que dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. En déduire que $L = 1$.
5. Montrer à l'aide de la question 3(b) que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2 – Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, muni de la distance usuelle (distance euclidienne). Montrer que F est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F converge vers une limite ℓ appartenant aussi à F.

Indications :

– sens direct : considérer une boule autour de ℓ.

– réciproque : par la contraposée, si F n'est pas fermé, montrer qu'il existe x dans le complémentaire tel que toute boule centrée en x rencontre F...

Exercice 3 – *Dans tout l'exercice, tous les entiers considérés sont supérieurs ou égaux à 3.*
Soit pour tout $n \geqslant 3$, f_n l'application définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Soit $n \geqslant 3$. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite ℓ.
   (c) Justifier que pour tout $n \geqslant 3$, $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, et en déduire un équivalent de $(\ln(\beta_n))_{n\geqslant 3}$, puis l'équivalent suivant : $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

PROBLÈME

PARTIE I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. On considère l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Montrer qu'elle admet trois racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < x_3$ vérifiant $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$.
2. Montrer que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et en déduire que $|x_2| < |x_1| < |x_3|$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par les conditions initiales $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ et la relation $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n > 0$.
4. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n.$$
On exprimera λ_1, λ_2 et λ_3 en fonction de x_1, x_2 et x_3.
Il est demandé de ne pas utiliser ces expressions dans le reste du problème.
5. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à une suite géométrique qu'on précisera.
6. Déterminer la limite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. (Utiliser la question 5.)

PARTIE II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = b_n - x_3$. Montrer que $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\dfrac{x_1}{x_3}\right)^n$.
2. En déduire que $|b_n - x_3| = O\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^n\right)$.
3. Soit $\beta > 0$, et soit $E(\beta)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(\beta^n)$.
   (a) Montrer que si $\beta < 1$, tous les éléments de $E(\beta)$ convergent vers 0.
   (b) Montrer que $E(\beta)$ contient toutes les suites géométriques de raison q, avec $|q| < \beta$.
   (c) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite non nulle, dont tous les termes sont non nuls, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $E(\beta)$.
4. On pose $\beta = \max\left(\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right|, \left|\dfrac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|^2\right)$. Vérifier que $\beta < \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$, et montrer que
$$b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n).$$
5. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $c_n = \dfrac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}$. Justifier que $c_n - \dfrac{x_1}{x_3} = O\left(\left(\dfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$.
6. Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $d_n = \dfrac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}$. Montrer que $d_n - x_3 = O(\beta^n)$. En quoi peut-on dire qu'on a accéléré la convergence de la suite ?