Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 24 octobre 2006

Devoir Maison n° 4

PROBLÈME – Étude de séries

On admettra dans l'ensemble de ce problème que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*, alors* $\ln(1+u_n) = u_n + O(u_n^2)$.

1. **La règle de d'Alembert**
   Soit $\sum v_n$ *une série telle que la suite* $\left(\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bien définie, et admette une limite réelle* ℓ.
   (a) On suppose que $\ell < 1$, et on considère $\ell' \in]\ell, 1[$.
      i. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|v_{n+1}| \leqslant \ell' |v_n|$.
      ii. En comparant $(|v_n|)_{n\geqslant N}$ à une suite géométrique, montrer que $\sum v_n$ converge absolument.
   (b) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que $\sum v_n$ diverge grossièrement.
   (c) En considérant deux séries particulières, justifier que $\ell = 1$ est un cas d'indétermination (*i.e.* la série $\sum v_n$ peut soit diverger, soit converger).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$*, et* $q \in [\![0, p]\!]$*. L'objet des trois questions qui suivent est de déterminer les valeurs de* x *dans* $\mathbb{R}$ *pour lesquelles la série* $\sum_{n\geqslant 0} \binom{pn}{qn} x^n$ *converge. On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = \binom{pn}{qn}$.

2. **Étude du cas de presque toutes les valeurs de** $x \in \mathbb{R}$
   (a) Étudier l'existence et la valeur ℓ de la limite de $\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On exprimera ℓ en fonction de p et q.
   Indication : Simplifiez les factorielles !
   (b) Montrer que $\sum u_n x^n$ converge absolument si $|x| \leqslant \dfrac{1}{\ell}$, et diverge grossièrement si $|x| > \dfrac{1}{\ell}$.

3. **Étude du cas où** $x = \dfrac{1}{\ell}$**.** *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u'_n = \dfrac{u_n}{\ell^n}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
   Indication : On pourra soit encadrer cette somme partielle par deux intégrales, soit montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *admet une limite finie.*
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\ln(u'_n) - \ln(u'_{n-1}) = \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(1 - \frac{k}{np}\right) - \sum_{k=1}^{q-1} \ln\left(1 - \frac{k}{nq}\right) - \sum_{k=1}^{p-q-1} \ln\left(1 - \frac{k}{n(p-q)}\right).$$
   (c) En déduire que : $\ln u'_n - \ln u'_{n-1} = -\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (d) En déduire que : $\ln u'_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2} \ln n$.
   (e) En étudiant la limite de $(\ln(n u'_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, déterminer la nature de $\sum u'_n$.

4. **Étude du cas où $x = -\frac{1}{\ell}$.**

   (a) Justifier que $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, et est décroissante à partir d'un certain rang.

   (b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n u'_n$. En considérant les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer la nature de $\sum (-1)^n u'_n$.

5. **Programmation.** On suppose que $p = 2$ et $q = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot u'_n$. Que vaut u'_0 ?

   (b) Écrire un programme en Pascal demandant à l'utilisateur une valeur n et renvoyant $\sum_{k=0}^{n} u'_k$.

On étudie dans les deux dernières questions des séries similaires présentant un comportement différent en $\frac{1}{\ell}$.

5. **Étude de la série $\sum \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot x^n$.**

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{(4n)!}{(n!)^4}$.

   (a) Montrer l'existence d'un réel ℓ' tel que la série $\sum v_n x^n$ converge si $|x| < \frac{1}{\ell'}$ et diverge si $|x| > \frac{1}{\ell'}$.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v'_n = \frac{v_n}{(\ell')^n}$.

   (b) Montrer, en vous inspirant de questions précédentes, que $\ln v'_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2} \ln n$.

   (c) En étudiant la limite de $(\ln(n^{\frac{5}{4}} v'_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, déterminer la nature de la série $\sum v'_n$.

   (d) La série $\sum (-1)^n v'_n$ converge-t-elle ?

6. **Étude de la série $\sum \frac{(3n)!}{(n!)^3} \cdot x^n$.**

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

   (a) Montrer l'existence d'un réel ℓ'' tel que la série $\sum w_n x^n$ converge si $|x| < \frac{1}{\ell''}$ et diverge si $|x| > \frac{1}{\ell''}$.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w'_n = \frac{w_n}{(\ell'')^n}$.

   (b) Montrer, en vous inspirant de questions précédentes, que $\ln w'_n = -\ln n + O(1)$.

   (c) En déduire que : $\exists a > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n w'_n > a$;
   Quelle est la nature de $\sum w'_n$?

   (d) Déterminer la nature de $\sum (-1)^n w'_n$.