

Devoir Maison n° 6

Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $e^{2in\alpha} \neq (-1)^n$. Soit P le polynôme :

$$P = (1 + iX)^n - (\cos(2n\alpha) + i\sin(2n\alpha))(1 - iX)^n.$$

1. Déterminer les racines de P , ainsi que leur multiplicité.
2. En factorisant P , calculer $\prod_{k=1}^n \tan\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$, dans les cas où cette expression est bien définie.

Exercice 2 – Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ définis par :

$$P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \quad \text{et} \quad Q = X^n - |a_1|X^{n-1} - \dots - |a_{n-1}|X - |a_n|.$$

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \frac{Q(x)}{x^n}$, montrer que Q admet une unique racine réelle positive.
2. Le but de cette question est de montrer que les racines de Q différentes de r sont de module strictement inférieur à r . Soit s une racine complexe quelconque de Q .
 - (a) En appliquant judicieusement l'inégalité triangulaire, montrer que $g(|s|) \leq 0$, puis que $|s| \leq r$.
 - (b) On suppose que $|s| = r$, et on pose $s = re^{i\theta}$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n |a_k| r^{n-k} (1 - \cos(k\theta)) = 0.$$

- (c) En déduire que $s = r$. Conclure quant au problème posé en début de question 2.
3. Soit $M_1 = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (1 + |a_k|)$.
 - (a) Montrer que $Q(M_1) \geq 1$ (on pourra majorer les $|a_k|$)
 - (b) En déduire que $r < M_1$.
 4. Soit $M_2 = \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
 - (a) Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme $\sum_{k=1}^n |a_k| M_2^{n-k}$, que $g(M_2) > 0$.
 - (b) En déduire que $r < M_2$.
 5. Soit z une racine de P . Montrer que $g(|z|) \leq 0$, et en déduire que $|z| \leq r$.
 6.
 - (a) Quel est le nombre de racines de P , comptées avec multiplicité ?
 - (b) Soit $z_1, \dots, z_n$ les racines de P (énumérées avec multiplicité), et soit $r_1 = \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$.
En exprimant les coefficients à l'aide des racines, montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| \leq \binom{n}{k} r_1^k$.
 - (c) En se rappelant de la définition de r , en déduire que $r^n \leq (r_1 + r)^n - r^n$, puis que $r_1 \geq (\sqrt[n]{2} - 1)r$.
 - (d) Montrer que : $(\sqrt[n]{2} - 1)r \leq r_1 \leq r$.
 7. En considérant les polynômes $P_1 = (X + 1)^n$ et $P_2 = 2X^n - (X + 1)^n$, montrer que l'encadrement de la question précédente est optimal, c'est-à-dire qu'il existe des cas d'égalité.