

### Devoir Maison n° 8

**Problème 1** – On note  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle  $AM + MB$ , d'inconnue  $M$ . Étant donné  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$ , on note  $V_{A,B}$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des matrices  $M$  vérifiant  $AM = MB$ .

On définit :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$ , et  $\varphi_{A,B}$  l'application qui à toute matrice  $M$  de  $E$  associe la matrice  $AM - MB$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$ , et en déduire que  $V_{A,B}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - (b) Dans le cas particulier où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , déterminer la matrice de  $\Phi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ .
  - (c) En étudiant l'inversibilité de cette matrice, déterminer  $V_{A,B}$ , dans le cas particulier précédent.
3. Dans cette question,  $r$  et  $s$  désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$  et  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ .
  - (a) Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  une matrice quelconque de  $E$ . Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur  $x, y, z, t$  pour que  $M$  appartienne à  $V_{D,\Delta}$ .
  - (b) En déduire une base de  $V_{D,\Delta}$ .
4. Soit  $a, b, c, d$  des réels non nuls vérifiant  $a - b \neq c - d$ ,  $a - b \neq 1$ , et  $c - d \neq 1$ . On définit :  $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}$  et  $b = c1 - cd1 - d$ . On pose  $r = a - b$  et  $s = c - d$  et  $D$  et  $\Delta$  comme précédemment.
  - (a) Déterminer les valeurs de  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  pour lesquelles  $\text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{0\}$  (on trouve deux valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ).
  - (b) En considérant des bases des deux noyaux précédents, déterminer une base de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ .
  - (c) En déduire l'existence d'une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}AP$ . Déterminer explicitement une telle matrice  $P$ .
  - (d) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible  $Q$  telle que  $\Delta = Q^{-1}BQ$ .
  - (e) Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , montrer qu'elle appartient à  $V_{A,B}$  si et seulement si la matrice  $P^{-1}MQ$  appartient à  $V_{D,\Delta}$ . En déduire une base de  $V_{A,B}$ .
5. Dans cette question,  $r, s, u$  et  $v$  désignent quatre réels vérifiant  $r \neq s$ ,  $r \neq v$ ,  $u \neq s$  et  $u \neq v$ . On pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer  $V_{D,\Delta}$ , ainsi qu'une base de cet espace.

(b) Pour toute matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on définit

$$\text{Spec}(C) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \text{Ker}(C - \lambda I_2) \neq \{0\}\}$$

Déterminer, par une méthode analogue à celle de la question 4, le sous-espace vectoriel  $V_{A,B}$  dans le cas où  $A$  et  $B$  vérifient  $|\text{Spec}(A)| = |\text{Spec}(B)| = 2$ , et  $\text{Spec}(A) \cap \text{Spec}(B) = \emptyset$ .

## Problème 2 –

### Partie préliminaire

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Quelle est la limite de la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , somme partielle de la série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  ?
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_*$ . Justifier que  $(E_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(E_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.
3. Écrire un programme en Turbo Pascal demandant à l'utilisateur un réel strictement négatif  $x$ , ainsi qu'une marge d'erreur, et renvoyant une valeur approchée de  $e^x$  à la marge d'erreur donnée près, sans pour cela utiliser la fonction `exp`.

### Partie I – Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soit  $A$  et  $P$  les matrices définies par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice  $P$  est inversible, et déterminer  $P^{-1}$ .
2. On pose  $T = P^{-1}AP$ .
  - (a) Calculer la matrice  $T$ .
  - (b) Calculer  $T^2$ ,  $T^3$ , puis  $T^n$  pour tout entier naturel  $n \geq 3$ .
  - (c) En déduire que :  $\forall n \geq 3, A^n = 0$ .
3. Pour tout réel  $t$ , on définit la matrice  $E(t)$  par :  $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, E(t)E(t') = E(t + t')$ .
  - (b) Pour tout réel  $t$ , calculer  $E(t)E(-t)$ . En déduire que  $E(t)$  est inversible, et exprimer son inverse en fonction de  $I_3, A, A^2$  et  $t$ .
  - (c) Pour tout  $t$  réel et tout entier naturel  $n$ , exprimer  $(E(t))^n$  en fonction de  $I_3, A, A^2, t$  et  $n$ .

### Partie II – Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soit  $B$  une matrice d'ordre 2. Pour tout entier naturel non nul, et tout réel  $t$ , on définit la matrice  $E_n(t)$  par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k, \quad \text{que l'on note} \quad E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}.$$

Soit  $B$  et  $D$  les matrices définies par  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $Q$  inversible telle que  $Q^{-1}BQ = D$  ( i.e.  $BQ = QD$  ).
2. Pour tout entier naturel  $k$ , calculer explicitement  $B^k$ .
3. En déduire une expression de  $a_n(t)$  sous forme d'une somme et de même pour  $b_n(t)$ ,  $c_n(t)$  et  $d_n(t)$ .
4. Déterminer les limites de ces quatre suites lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
5. On pose  $E(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(t)$  (limite coefficient par coefficient).
  - (a) Montrer qu'il existe deux matrices  $E_1$  et  $E_2$  que l'on explicitera telles que pour tout réel  $t$ ,  $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$ .
  - (b) Calculer  $E_1, E_2, E_1 E_2$  et  $E_2 E_1$ .
  - (c) En déduire que pour tout réel  $t$ ,  $E(t)$  est inversible, et déterminer son inverse.