

Probabilités 1 – Dénombrements

Exercice 1 – Un jeu comporte 32 cartes (8 par couleurs, 4 couleurs). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
3. Combien ne contiennent pas plus de deux couleurs ?
4. Combien de mains contiennent les 4 as ?
5. Combien de mains contiennent 4 trèfles dont la dame ?
6. Combien de mains ne contiennent pas de cœur ?
7. Combien de mains contiennent au plus 3 carreaux ?

Exercice 2 – On dispose de 10 CD dont 4 de Bach et 4 de Mozart.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger les CD sur une étagère de sorte que les disques de Bach restent groupés ? qu'à la fois les disques de Bach et les disques de Mozart restent groupés ?
2. Combien y a-t-il de façons de ranger les CD de sorte que les 8 CD de Bach ou Mozart restent groupés, mais en alternant ?

Exercice 3 – Un tiroir contient 5 paires de chaussettes noires, 3 paires vertes et 3 paires rouges. On choisit 2 chaussettes au hasard.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent deux chaussettes noires ? deux chaussettes de même couleur ?
3. Mêmes questions avec des paires de chaussures.
4. Combien de tirages amènent deux pieds gauches ? un pied gauche et un pied droit ?
5. Combien de tirages permettent de reconstituer une paire de chaussures noires ?

Exercice 4 – Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement 6 boules dans l'urne, avec remise. Un résultat est une succession de boules blanches et noires.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien de résultats ont :
 - (a) 5 boules noires et 1 boule blanche dans cet ordre ?
 - (b) 1 boule noire au plus ?
 - (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
 - (d) 1 boule blanche au moins ?
3. Mêmes questions pour un tirage successif sans remise.
4. Mêmes questions si on suppose que les boules sont numérotées (donc discernables), avec un tirage successif, avec remise.
5. Mêmes questions avec des boules numérotées tirées successivement sans remise.
6. Mêmes questions avec des boules numérotées tirées simultanément.

Exercice 5 – Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & 2. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} & 3. \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \\
 4. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} & 5. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 & 6. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2
 \end{array}$$

Exercice 6 – Montrer par une méthode combinatoire que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$.

Exercice 7 –

1. Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$ et $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$.
2. De même calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$, $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$ et $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$.

Exercice 8 – Soit E un ensemble à n éléments. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de couples (a, B) , où $a \in E$ est un élément de E et $B \subset E$ est un sous-ensemble de E à $n - 1$ éléments tel que $a \notin B$, montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 9 – Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A, B) de sous-ensembles de E tels que $A \subset B$?

Exercice 10 – Soit $p \geq 2$, $q \geq 0$. Montrer que $\sum_{j_1 + \dots + j_p = q} \binom{a_1}{j_1} \dots \binom{a_q}{j_q} = \binom{a_1 + \dots + a_q}{q}$.

Exercice 11 – Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer que $\sum_{A \in \mathcal{P}_n} \sum_{k \in A} k = n(n+1)2^{n-2}$.
2. Calculer $\prod_{A \in \mathcal{P}_n} \prod_{k \in A} k$.

Exercice 12 –

1. En raisonnant par récurrence, montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.
2. Soit E l'ensemble $\{1, \dots, p+n+1\}$. Soit $k \in E$. Compter le nombre de sous-ensembles de E à $p+1$ éléments dont le plus grand élément est k .
3. En comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à $p+1$ éléments de E , retrouver la formule de la question 1.

Exercice 13 – (HEC 1991) Soit $A_1 \dots A_n$ un polygone général. On trace chaque côté et chaque diagonale soit en noir soit en rouge.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Cas d'un hexagone.
 - (a) Montrer qu'il existe à partir de A_1 trois segments de même couleur.
 - (b) En déduire qu'il existe toujours un triangle unicolore.
3. Montrer que la question 2 entre en défaut si l'on remplace l'hexagone par un pentagone.

Exercice 14 – Calculer la probabilité que dans une classe de 40 élèves, deux élèves aient leur anniversaire le même jour.

Exercice 15 –

1. Quel est le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$?
2. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$?

Exercice 16 – On note $S(n, k)$ le nombre de partitions en k parts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, k \rrbracket$ est $k!S(n, k)$ (considérer l'application de l'ensemble des surjections vers l'ensemble des partitions à k parts qui à une surjection f associe la partition des images réciproques de chaque élément de $\llbracket 1, k \rrbracket$).
2. En classant les partitions selon que le singleton $\{n\}$ en est une part ou non, montrer que pour tout $n > 0$ et tout $k > 0$,

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Que vaut $S(n, 0)$? $S(n, n)$?