

Probabilités 4 – Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1 – On lance deux dés. On note X la v.a.r. égale à la somme des points obtenus. Tracer le graphe de la fonction de répartition de X .

Exercice 2 – Soit X une v.a.r. discrète tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Montrer que $P[X = n] = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ définit une loi de probabilité sur X .

Exercice 3 – Soit X, Y et Z trois v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{J}(1, p)$, c'est-à-dire $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $p(X = k) = pq^k$, et de même pour Y et Z . Calculer $P(X = Y)$, $P(X \geq 2Y)$, $P(X + Y \leq Z)$.

Exercice 4 – Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, X une v.a.r. discrète à valeurs dans $\{1, \dots, ab\}$, et telle que $\forall x \in \{1, \dots, ab\}$, $P(X = x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b ?
2. Déterminer la fonction de répartition F de X , et donner une représentation graphique. Résoudre $F(u) = \frac{1}{2}$.
3. Déterminer $E(X)$, et trouver a et b tels que $E(X) = \frac{7}{2}$.

Exercice 5 – (Oral E.S.C.P.) – Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Chaque résultat de X est affiché sur un compteur détraqué : si X n'est pas nul, le compteur affiche la bonne valeur ; si X est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et n . On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché.

1. Déterminer la loi de Y et son espérance.
2. Montrer, sans calcul, que $E(Y) \geq E(X)$.

Exercice 6 – Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives, numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$. Les sauts sont indépendants les uns des autres. La probabilité de succès au n -ième saut est $\frac{1}{n}$. On note X la v.a.r. égale au dernier saut réussi.

1. Déterminer la loi de X , et vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} P[X = n] = 1$.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance, et les calculer.

Exercice 7 – k urnes numérotées de 1 à k contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n . On extrait une boule de chaque urne. On note X_i la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée dans l'urne i . On définit la v.a.r. Y par $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de Y .
2. En déduire la loi de Y .
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 8 – Soit X une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{J}(1, p)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $Y = \min(X, m)$.

1. Quelles valeurs prend Y ?
2. Donner la loi de Y .
3. Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 9 – Déterminer a pour que les égalités $p(X = n) = \frac{a(n+3)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ définissent une loi de probabilité. Calculer son espérance, son moment d'ordre 2, sa variance.

Exercice 10 – Soit $x \in]0, 1[$. Déterminer a pour que $P(X = n) = \frac{x^n}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) soit une loi de probabilité. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 11 – On lance un dé trois fois de suite : on obtient des valeurs a , b et c . On considère l'équation $ax^2 + bx + c$. On définit une variable aléatoire X par $X = 1$ si cette équation admet deux racines réelles distinctes, $X = 0$, si elle admet une racine double, et $X = -1$ si elle n'admet pas de racine réelle. Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 12 – Trouver toutes les lois de probabilité $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formant une suite arithmético-géométrique. Déterminer leur espérance et leur variance.

Exercice 13 – Trouver toutes les lois de probabilité $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = \frac{5}{6}p_{n+1} - \frac{1}{6}p_n$. On pourra expliciter p_n en fonction de n et p_0 et p_1 , exprimer p_1 en fonction de p_0 , et montrer que $p_0 \leq \frac{1}{3}$; réciproquement, toute valeur de p_0 telle que $p_0 \leq \frac{1}{3}$ convient.

Exercice 14 – Un mobile évolue de façon aléatoire sur un axe avec une probabilité p de se déplacer de $+1$ à chaque mouvement et une probabilité $1-p$ de se déplacer de -1 . Initialement, il est en position 0. On note X_n sa position après n mouvements.

1. Loi de probabilité de X ?
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \frac{X_n + n}{2}$. Quelle loi suit Y ? En déduire son espérance et sa variance.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_n)$ et $V(X_n)$. Pour quelle valeur de p la v.a.r. X_n est-elle centrée.

Exercice 15 – On tire une à une les boules d'une urne contenant initialement n boules blanches et n boules noires.

1. Soit X : rang d'apparition de la première boule blanche. Loi de X , espérance de $E(2n+1-X)$ puis de $E(X)$.
2. Soit Y : rang d'apparition de la deuxième boule blanche. Calculer : $\sum_{j=0}^n (j+1) \binom{2n-2-j}{n-2}$.

Exercice 16 – X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n P(X > k) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) + (n+1)P(X > n)$.
(b) En déduire que si $\sum P(X > k)$ converge, alors : $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.
Conclure que X admet alors une espérance.
2. On suppose que X admet une espérance. Montrer que $\sum P(X > k)$ converge, et que sa somme vaut $E(X)$.
3. Une marque de lessive édite une collection de 4 pin's différents. Une ménagère achète des barils de cette lessive afin que sa fille puisse collectionner les pin's. On suppose les achats indépendants. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité p_n qu'après avoir acheté n baril, la collection de pin's ne soit pas complète. On pourra considérer les événements A_i : « le pin's n° i n'est pas obtenu dans les n achats », et appliquer la formule du crible de Poincaré.
4. Soit X la v.a.r. égale au nombre minimal de baril que doit acheter la ménagère pour que sa fille ait une collection complète de pin's.
(a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X > n)$ en fonction de p_n .
(b) En utilisant les premières questions, montrer que X admet une espérance et la calculer.