

Probabilités 6 – Lois discrètes classiques

Exercice 1 – Soit $p \in]0, 1[$, et soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ une v.a.r. suivant la loi de Bernoulli. Calculer les moments et moments centrés d'ordre k de X , pour tout $k \geq 1$.

Exercice 2 – Le moment factoriel d'ordre k d'une v.a.r. X est : $\mu_{[k]} = E(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu_{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!} p^k$.

Exercice 3 – On lance une pièce truquée. On note p la probabilité d'apparition de « pile ». Soit X le temps d'attente du premier « pile ». Trouver un entier s tel que $P(X \leq s) \geq 1 - \alpha$, où α est un nombre réel donné tel que $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4 – On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « face ». Quelle est la probabilité que le nombre de lancers soit pair ? impair ?

Exercice 5 – On lance une fusée vers Saturne. On admet que la probabilité de succès est 0.7. On décide de lancer des fusées jusqu'à ce que trois succès soient réalisés. Probabilité que cela nécessite moins de dix lancers ? Quelle devrait être la probabilité de succès pour que la probabilité d'avoir trois succès en moins de dix lancers soit supérieure à 0.95 ?

Exercice 6 – Soit X une v.a.r. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout entier naturel n , on a $4(X = n + 2) = 5P(X = n + 1) - P(X = n)$. Montrer que X suit une loi classique que l'on déterminera, et en déduire sans calcul son espérance et sa variance.

Exercice 7 – (Oral ESCP) – On remplace une carte quelconque (autre que l'as de pique) d'un jeu de 32 cartes par un deuxième as de pique. Soit n et p deux entiers strictement positifs.

1. On tire sans remise n cartes. Probabilité de déceler la supercherie.
2. Ici, $n = 4$. On recommence p fois le tirage de la question précédente, en remettant à chaque fois les 4 cartes tirées dans le jeu entre chaque tirage. Quel est le nombre d'expériences nécessaire pour déceler la supercherie avec une probabilité supérieure à 0.95 ?

Exercice 8 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(X = k)$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} V(X)$. Commentaire.

Exercice 9 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer les moments factoriels de X (cf exercice 2)

Exercice 10 – Le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standant durant une période T (exprimée en heures) suit une loi de Poisson de paramètre $10T$.

1. Trouver un majorant simple pour la probabilité que le nombre d'appels reçus pendant une période de six minutes soit supérieur ou égal à un entier j donné (solution attendue : $\frac{e^{-1}}{j!} \cdot \frac{j+1}{j}$)
2. Même question pour une durée d'une heure (solution attendue : $\frac{10^j}{j!}$).
3. Même question pour une durée de 3 minutes (solution attendue : $\frac{1}{\sqrt{e} \cdot 2^{j-1} j!}$).

Exercice 11 – Jules et Julie tiennent un commerce. Le nombre de clients dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ . Jules parie qu'aujourd'hui, ils auront un nombre impair de clients. Julie parie le contraire. Qui a le plus de chance de gagner son pari ?

Exercice 12 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, et $a > 0$, $a \neq 1$. Soit $Y = \frac{a^X}{2^n}$. Loi de Y et espérance ?

Exercice 13 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire sans remise dans une urne contenant n boules noires, et n boules blanches, jusqu'à obtention de toutes les boules noires. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires. Loi et espérance de X ?

Exercice 14 – Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de X est définie pour tout t pour lequel cette série converge par : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$. On note R son rayon de convergence (autrement dit, G_X converge si $|t| < R$ et diverge si $|t| > R$). On admet dans tout l'exercice qu'une série du type $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R est dérivable terme à terme sur $] -R, R[$.

Remarque : si $X(\Omega)$ est fini, alors G_X est un polynôme.

1. Justifier que $R \geq 1$.
2. Montrer que si $R > 1$, alors X admet une espérance, donnée par $G'_X(1)$. Si la série dérivée admet aussi un rayon de convergence strictement plus grand que 1, alors $E(X(X-1)) = G''_X(1)$.
3. Calculer les séries génératrices de X dans les cas suivants : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{J}(r, p)$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
4. Dans chacun des cas ci-dessus, retrouver l'expression de l'espérance et de la variance à l'aide des séries génératrices.

Exercice 15 – n personnes jettent simultanément une pièce de monnaie ($n > 2$). Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties nécessaires pour l'obtention d'un vainqueur. Déterminer X et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 16 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{J}(1, p)$, et $Y = \min(X, m)$. Loi, espérance et variance de Y .

Exercice 17 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et F_X sa fonction de répartition. Montrer que

$$F_X(n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx.$$

Exercice 18 – (**Oral HEC**) – Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix entrées $E_1, \dots, E_{10}$ qui sont équiprobables.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée
2. On désigne par X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 en une journée donnée. Déterminer la loi de X_1 , et en déduire son espérance et sa variance.
3. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par E_1 par jour.

Exercice 19 – (**Oral HEC**) – Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire une poignée aléatoire éventuellement vide. On note Y le nombre de jetons, et X la somme des numéros obtenus. On suppose que Y suit une loi uniforme.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Soit X_k la variable aléatoire égale à k si le jeton k est dans la poignée, et 0 sinon. Montrer que $\frac{X_k}{k}$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 20 – (**Oral HEC**) – Soient α et β deux réels, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a \cdot \frac{\alpha^k + \beta^k}{k!}$.

1. Suivant les signes de α et β , discuter l'existence de a pour que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit une loi de probabilité. Le cas échéant, déterminer a .
2. Dans les cas où on a défini une loi, soit X une v.a.r. suivant cette loi. Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. Peut-il arriver que X suive une loi de Poisson ?