Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Février 2008

Algèbre 3 – Polynômes

Exercice 1 – Déterminer le degré et la valuation de chacun des polynômes P_n ($n \in \mathbb{N}$) définis par les relations de récurrence suivantes (on ne cherchera pas à expliciter P_n) :

1. $P_0 = X^2 + X$; pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = X^2 P_n + X P_n'$.
2. $P_0 = X^2 + X$; pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = (X^2+1)P_n + X^3 P_n'$.
3. $P_0 = X^2 + X$; pour tout $n \geqslant 0$, $P_{n+1} = (X^2+1)P_n + (X^3 - X)P_n'$

Exercice 2 – Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 3 – Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, P_n a une unique racine u_n dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge.
3. Déterminer la limite de u_n (on pourra considérer le polynôme $(X-1)P_n(X)$).

Exercice 4 – Soit $E_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Montrer que E_n n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 – Soit $E_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$.

1. Montrer que E_n n'admet pas de racine réelle si n est pair, et en admet exactement une si n est impair.
2. On note u_n la racine de E_{2n+1}. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite que l'on précisera dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 6 – Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X^2+1)P'' - 6P = 0$?

Exercice 7 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine des polynômes :
a) $X^n - nX + (n-1)$; b) $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$; c) $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

Exercice 8 – Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 9 – Trouver les quotients et les restes des divisions euclidiennes de P par Q :

1. $P = 3X^4 + X^3 - 2X^2 + 1$; $Q = X - 1$;

2. $P = X^6 + X^5 - X$; $Q = 2X + 1$;
3. $P = X^{10} + 1$; $Q = X - 2$.

Exercice 10 – Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (sans utiliser la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$) les polynômes $X^5 - 1$ et $X^6 + 1$.

Exercice 11 – Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 12 – Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, unitaires, de degré 3, divisibles par $X-1$, et dont les restes des divisions euclidiennes par $X-2$, $X-3$, $X-4$ sont égaux.

Exercice 13 – **(Oral HEC)** – Trouver tous les polynômes P de degré 7 tels que le reste de la division euclidienne de P par $(X+2)^4$ soit égal à 2 et le reste de la division euclidienne de P par $(X-2)^4$ soit égal à -2.

Exercice 14 – Soit a et b deux entiers strictement positifs. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.

Exercice 15 – Trouver les restes des divisions euclidiennes de $(X-3)^{3n} - (X-2)^n - 2$ par :
a) $(X-3)(X-2)$; b) $(X-3)^2$; c) $(X-3)^2(X-2)^2$; d) $X^2 - 1$.

Exercice 16 – Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(X^2+X+1)^2$ divise $(X+1)^n - X^n - 1$.

Exercice 17 – Déterminer les polynômes complexes P tels que $P(X^2) = -P(X)P(X+1)$.

Exercice 18 – Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes

1. sur $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^2 + pX + q$ divise $P(X^2+1)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
2. sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $X^3 + X^2 - cX + 1$ divise $X^5 + aX^2 + b$ dans $\mathbb{C}[X]$;
3. sur $(a,b) \in \mathbb{Z}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Déterminer le quotient.

Exercice 19 – Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$. Montrer que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 20 – Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 21 – Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Montrer que si r est racine double de $P^2 + Q^2$, alors r est racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 22 – Soit $n \geqslant 2$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$.
Calculer, pour tous complexes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\prod_{k=0}^{n-1} (a + b\omega_k)$.

Exercice 23 – Soit $P(X) = nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1$. Montrer que toutes les racines de P sont simples et de module au plus 1 (on pourra multiplier P par un polynôme très simple judicieusement choisi).

Exercice 24 – Résoudre $x^7 - 3x^6 + 4x^4 - 4x^3 + 3x - 1 = 0$.

Exercice 25 –

1. Soit $P = X^{2n} - 1$. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

Exercice 26 – Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X \cos t + \sin t)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 27 – **(Oral HEC)** –

1. Soit P un polynôme de degré n. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P(X) - P(X-1)$.
2. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de polynômes vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_1(X) = X, \\ \forall n \geqslant 2,\ H_n(X) - H_n(X-1) = H_{n-1}(X), \\ \forall n \geqslant 1,\ H_n(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Déterminer H_2.
   (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de H_n.
   (c) Trouver les racines de H_n et en déduire son expression sous forme factorisée.
   (d) En déduire l'existence et l'unicité d'une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus.
3. Soit $f_{n,p}$ le nombre d'applications croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$, $f_{n,p}$ en fonction de $f_{n-1,p}$ et $f_{n,p-1}$.
   (b) En déduire $f_{n,p}$ en fonction de $H_n(p)$.
   (c) Expliciter l'égalité précédente. Surprise ?