Algèbre 4 – Nombres complexes

Exercice 1 – Module et argument de $z = 1 - \mathrm{i} \cdot \tan\theta$.

Exercice 2 – Calculer les racines carrées de $2 - 3\,\mathrm{i}\sqrt{5}$.

Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - z + \mathrm{i} + 1 = 0$. Même question avec $z^2 + (\mathrm{i} - 3)z + (4 - 3\,\mathrm{i}) = 0$.

Exercice 4 – Déterminer les racines de $X^4 + \mathrm{i}$, sous forme trigonométrique, sous forme algébrique.

Exercice 5 – Donner une expression des racines n-ièmes de $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Exercice 6 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 7 – Linéariser $\sin^{2m} t$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2m} t \cos(2mt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \tan\frac{k\pi}{2p+1} = \sqrt{2p+1}$.

Exercice 9 – Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 10 – Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 11 – Calculer $nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \cdots + 2z + 1$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

Exercice 12 – Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(ka)$.

Exercice 13 – Calculer $1 + 2(\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt)$.

Exercice 14 – En factorisant de deux manières différentes $X^5 - 1$, calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, puis $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 15 – **Polynômes de Tchebychev de première espèce**

On définit les polynômes de Tchebychev par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0 = 1; \qquad T_1 = X; \\ T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme, et déterminer son degré.
2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. En utilisant la formule de Moivre, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $T_n(\cos(\theta))$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite du polynôme T_n.

Exercice 16 – **Polynômes de Tchebychev de seconde espèce**

Soit U_n la suite de polynômes définie par : $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$ et $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$, $U_n\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right) = \dfrac{z^{n+1} - \dfrac{1}{z^{n+1}}}{z - \dfrac{1}{z}}$.
2. En déduire $U_n(\cos\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$. Cas où $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$?
3. En déduire une expression de $\sin(7\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n, tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\omega_k) = n + 1$
2. En déduire que $\displaystyle\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

Exercice 18 – Le but de l'exercice est de montrer que si $\cos\theta = \frac{1}{p}$, où p est un entier impair au moins égal à 3, alors $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel (on dit que $\mathrm{Arccos}\frac{1}{p}$ est incommensurable à π). On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n}$, avec m et n premiers entre eux.

1. Déterminer explicitement des polynômes T_n et U_n tels que :
$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ et $\sin(n\theta) = \sin\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$.
2. Montrer que $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} (-1)^{j+1} \binom{n}{2j+1} (p^2 - 1)^j$, puis que n est pair et m impair.
3. Montrer que $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{E}(\frac{n}{4})} (-1)^{j+1} \binom{\frac{n}{2}}{2j} (p^2 - 1)^j$. Conclure.