Algèbre 5 – Espaces vectoriels

Exercice 1 – Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. Le sous-ensemble des fonctions positives.
2. Le sous-ensemble des fonctions s'annulant en 1.
3. Le sous-ensemble des fonctions tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Le sous-ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$
5. Le sous-ensemble des fonctions périodiques dont T est une période.
6. Le sous-ensemble de toutes les fonctions périodiques (quelle que soit la période).
7. Le sous-ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, mais pas $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 2 – Déterminer le réel m pour que $E_m = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - 3t = m\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \cup B = A + B$,
(ii) $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E,
(iii) $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 4 – Soient E un $\mathbb{K}$-ev, A, B, C trois sev de E tels que $A \subset C$ et A et B sont supplémentaires dans E. Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Exercice 5 – Étudier la liberté des familles suivantes (dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

1. (φ_a, φ_b), $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, où pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : x \mapsto \sin(x + a)$.
2. $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
3. $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $f_k : x \mapsto \cos^k x$
4. idem pour $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
5. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : x \mapsto x^n \cos(x)$, $g_n : x \mapsto x^n \sin(x)$.
6. $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R})$ soit infini.
7. $(f_n)_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k : x \mapsto \cos(x^k)$.

Exercice 6 – Liberté sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$ de la famille $(t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nt})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 – Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, u le vecteur défini par $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = u + e_i$. À quelle condition sur $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la famille $(v_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est-elle liée ?

Exercice 8 – Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -1, -2)$ engendrent le même sev que $(3, 7, 0)$ et $(5, 0, -7)$.

Exercice 9 –

1. Dans $\mathbb{R}^5$, montrer que la famille formée des vecteurs $(1, 0, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 3, 0, 2)$ et $(1, -1, 1, 1, 1)$ est libre.
2. Les compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^5$.
3. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire dans $\mathbb{R}^5$ du sev engendré par les trois vecteurs ci-dessus.

Exercice 10 –

1. Montrer que $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + t = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x + t = 0 \end{array} \right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, et en déterminer une base.
2. Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.

Exercice 11 – Soit E un $\mathbb{K}$-ev, A, B, C, D des sev de E. Montrer que :

1. $A \cap B = A + B \Longrightarrow A = B$
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$
3. $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$
4. $A \subset B \Longrightarrow A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$
5. $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

Exercice 12 – Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit E_1 le sev du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$ engendré par $(1, \dots, 1)$, et soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.\}$$

Justifier que H est un sev de $\mathbb{C}^n$, puis montrer que E_1 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

Exercice 13 – (HEC) – Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions f_k, $k \in \mathbb{N}$, par :

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) = \cos^k(x),$$

et les fonctions φ_k, $k \in \mathbb{N}$, par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_k(x) = \cos(kx)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)\varphi_h(x)\, \mathrm{d}x$, pour tout $(h, k) \in [\![1, n]\!]^2$.
   En déduire que la famille $\mathcal{F}_n = (\varphi_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est libre.
2. On désigne par F_n le sev de E constitué des combinaisons linéaires de φ_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Quelle est la dimension de F_n ?
   (b) Soit p un entier inférieur ou égal à n. Montrer que $f_p \in F_n$, et déterminer ses composantes dans $\mathcal{F}_n$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^p(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x$, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
3. Étudier l'appartenance de la fonction $x \mapsto \sin^p(x)$ à F_n.

Exercice 14 – Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit E_1 le sev du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$ engendré par $(1,\dots,1)$, et soit

$$H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 0.\}$$

Justifier que H est un sev de $\mathbb{C}^n$, puis montrer que E_1 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

Exercice 15 – Soit $S \subset \mathbb{R}$ telle que $-S = S$, c'est à dire que pour tout $x \in S$, $-x$ est encore élément de S. Soit :

$$P = \{f \in \mathbb{R}^S,\ \forall x \in S, f(-x) = f(x)\}, \qquad \text{et} \qquad I = \{f \in \mathbb{R}^S,\ \forall x \in S, f(-x) = -f(x)\}.$$

Montrer que P et I sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^S$.

Exercice 16 – Montrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 17 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (X - x_k).$$

Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j)P'(x_j)}$$

1. Montrer que cette expression définit un polynôme P_j de degré $n-1$.
2. Calculer $P_j(x_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et montrer que pour tout polynôme F, le polynôme $L_F = \sum_{j=1}^n F(x_j)P_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1,\dots,x_n$.
3. Montrer que $\sum_{j=1}^n P_j = 1$. Plus généralement, que vaut L_F si $\deg F \leqslant n-1$?
4. Les polynômes $(P_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
5. On écrit : $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j}X^i$. Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$.
6. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^n \dfrac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$. Indication : on pourra considérer $F(X) = X^j$.
7. En déduire que $\sum_{k=1}^n \dfrac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on déterminera.

Exercice 18 – Pour chacune des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, génératrices ; lesquelles sont des bases ?

1. $((1,3,-2),(2,1,0))$
2. $((1,5,6),(2,3,0),(3,8,6),(1,0,0))$
3. $((2,2,1),(1,1,2),(1,1,1))$
4. $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$.
5. $((1,2,0),(0,1,1),(2,0,1))$.

Exercice 19 – On considère dans un $\mathbb{K}$-ev E les deux système de vecteurs $S = (u_1,\dots,u_n)$ et $S' = (u_1,\dots u_p)$ extrait de S. En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que si $\mathrm{rg}(S) = r$, alors $\mathrm{rg}(S') \geqslant r + p - n$.

Exercice 20 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p < n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 21 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 22 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que tout système libre de E a au plus n éléments. Montrer que E est de dimension finie, et que $\dim E \leqslant n$.

Exercice 23 – **Autour de l'espace vectoriel des polynômes**

1. Justifier que l'ensemble des polynômes de degré au plus n, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. (a) Soit $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de polynômes tels que P_k soit de degré k. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, il existe d'uniques réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que :
   $$P = \sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k.$$
   Que reconnaissez-vous ?
3. (a) Soit $r_1,\dots,r_k \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des polynômes admettant $r_1,\dots,r_k$ comme racines (il peut y en avoir d'autres bien sûr) est un espace vectoriel, et en trouver une base.
   (On pourra constater qu'un tel polynôme s'écrit toujours PQ pour un polynôme déterminé P, et un polynôme quelconque Q, puis prendre une base dans laquelle on écrit Q)
   (b) Soit $n \geqslant k$. Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant $r_1,\dots,r_k$ comme racines est un espace vectoriel, et en trouver une base et sa dimension.
   (c) La question a est-elle encore vrai si $r_1,\dots,r_k$ sont dans $\mathbb{C}$? Si oui, trouver une base de cet espace dans le cas d'une racine, égale à i.
   (On se souviendra des propriétés des racines complexes de polynômes à coefficients réels)
   (d) On suppose qu'aucun des r_i n'est conjugué à un autre. Soit $n \geqslant 2k$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant $r_1,\dots,r_k$ pour racines
4. Soit $r \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit E l'ensemble des polynômes dont r est racine simple. E est-il un espace vectoriel ? (Justifiez votre réponse).
   (b) Soit F l'ensemble des polynômes dont r est la seule racine réelle (simple ou multiple). F est-t-il un espace vectoriel ? (Justifiez votre réponse)
5. L'ensemble des polynômes unitaires est-il un espace vectoriel (justifiez votre réponse).
6. La famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_n[X]$?