Algèbre 6 – Applications linéaires

Exercice 1 – Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ sont linéaires ou non. Si oui, déterminer leur image et leur noyau.

1. $(x, y) \mapsto (0, 0)$;	5. $(x, y) \mapsto (x, x)$;	8. $(x, y) \mapsto (x + y, y)$;
2. $(x, y) \mapsto (x, y)$;	6. $(x, y) \mapsto (y, x)$;	9. $(x, y) \mapsto (x, \sin y)$;
3. $(x, y) \mapsto (x, 0)$;	7. $(x, y) \mapsto (x - 3y, 2x)$;	10. $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$.
4. $(x, y) \mapsto (0, y^2)$;		

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par : $f(P) = P - P'$.

- Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que f est un automorphisme, et déterminer f^{-1} .
- Soit $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. Trouver l'unique polynôme P de E tel que $f(P) = Q$.

Exercice 3 –

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$. Montrer que : $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \iff \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$.

Exercice 4 –

- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E . Montrer que si pour tout $x \in E$ les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires, alors f est une homothétie.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f = f \circ u$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5 – Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer les formules suivantes :

1. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$;	5. $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \iff \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$;
2. $\text{Ker}(g \circ f) \supset \text{Ker}(f)$;	6. $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$.
3. $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$;	
4. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$;	

Exercice 6 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\text{Im } p = \text{Im } q$ et $p \circ q = q \circ p$.

Exercice 7 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs de E . Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f .

Exercice 9 – Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E . Montrer que :

$$\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g).$$

- Soit f un projecteur de E , et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap (\text{Ker } f + \text{Im } g).$$

- Soit g un projecteur, alors $\text{id} - g$ est un projecteur et $\text{Ker } g = \text{Im}(\text{id} - g)$, et $\text{Im}(g) = \text{Ker}(\text{id} - g)$.
- Soit f et g deux projecteurs de E . Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :

$$\text{Im}(f) \cap (\text{Ker}(f) + \text{Im}(g)) \subset \text{Im}(g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g).$$

Exercice 10 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$. On note f et g les applications de E dans E définies par : $f(P) = P'$; $g(P) = XP$.

- Montrer que f et g sont linéaires.
- Montrer que f est surjective et non injective.
- Montrer que g est injective et non surjective.
- Calculer $f \circ g - g \circ f$.
- On note $g^n = g \circ \dots \circ g$ (n facteurs). Par convention, $g^0 = \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$. Montrer que pour tout n strictement positif, on a : $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

Exercice 11 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Déterminer la matrice de f dans :

- la base canonique pour l'espace source et la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ pour l'arrivée ;
- la base $\mathcal{B}$ pour la source, la base canonique pour l'arrivée ;
- la base $\mathcal{B}$ pour la source, la base $\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, 1)\}$ pour l'arrivée ;
- la base $\mathcal{B}$;
- la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 12 – Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
- Plus généralement, soit P un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$. Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 13 – Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie d , et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire $u^n = 0$ pour n assez grand). On note n l'indice de nilpotence de u (c'est-à-dire $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Comparer n et d .

Exercice 14 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé

à la matrice A .

1. Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ et leur dimension.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ et une base de $\text{Ker}((f - \text{id})^2)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1} .
5. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n .

Exercice 15 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tels que $f = g \circ p$.

Exercice 16 – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul tel que $P(M) = 0$. Qu'en déduit-on pour les endomorphismes d'un espace de dimension n ?

Exercice 17 – Soit E un espace de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$. Montrer que le rang de f est 1.

Exercice 18 – Soit E un espace de dimension finie, f un endomorphisme de E de rang r . Montrer que f est la somme de r endomorphismes de E de rang 1.

Exercice 19 – Soit $f : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le noyau de f .
3. Montrer que pour tout polynôme P de degré strictement positif, on a $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$.
4. Montrer que f est surjective. Est-elle injective?
5. Montrer qu'il existe une base $(e_0, \dots, e_i, \dots)$ de $\mathbb{C}[X]$ telle que pour tout $i > 0$ on ait $f(e_i) = e_{i-1}$. Quel est le noyau de f ?

Exercice 20 – Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + P'$. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 21 – Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $2p$, avec $p \in \mathbb{N}$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = p$ et $u^2 = 0$. Comparer $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$.

Exercice 22 – Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$. Montrer que $E = \text{Im } v \oplus \text{Ker } u$, et que :

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(v) = \text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u \circ v).$$

Exercice 23 – Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\text{Im } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(u^p) = \text{Ker}(u^{p+1})$, alors $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geq p$. Qu'en est-il de $\text{Im}(u^k)$?
3. Montrer que pour une telle valeur de p , $\text{Ker}(u^p)$ et $\text{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E .
4. On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\text{Ker } u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leq \dim(E)$, $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$.
Indication : Écrire $\text{Ker } u^{p+1} = \text{Ker } u^p \oplus S$, et montrer que u^p se restreint en une injection de S dans $\text{Ker } u$. Qu'en déduit-on sur la dimension de S ?

Exercice 24 – On considère E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $(p+1)n$, n et p étant des entiers non nuls, avec $p \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E , vérifiant : $f^3 = 0$ et $\text{rg}(f) = pn$. Montrer que $\text{rg}(f^2) = n$.

Exercice 25 – Soit E un ev de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
2. On suppose que $f+g$ est un automorphisme et que $f \circ g = 0$.
(a) Montrer que $\dim \text{Im}(g) \leq \dim \text{Ker}(f)$.
(b) En déduire que $\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Im}(g) = n$.

Exercice 26 – Soit $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i : E_{i-1} \rightarrow E_i$ une application linéaire. On suppose que :

$$\{0\} \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} E_n \longrightarrow \{0\},$$

est exacte, ce qui signifie que f_1 est injective, f_n est surjective, et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E_k = 0.$$