Lycée Carnot — Avril 2008

ECS 4 – Mathématiques

A. Troesch

Algèbre 9 – Diagonalisation

Exercice 1 – Déterminer les valeurs propres des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est M. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer M^n, ainsi qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $N^2 = M$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n.

Exercice 3 – Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer $\mathrm{Spec}(u)$.

Exercice 4 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 – Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et u un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v = v \circ u$ ssi les vecteurs propres de u sont aussi vecteurs propres de v.
2. Montrer qu'il existe $w \neq 0$ tel que $w \circ u = -u \circ w$ si et seulement si soit u admet deux valeurs propres opposées, soit 0 est valeur propre de u.

Exercice 7 – Soit E un ev de dimension 4, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de f ; f est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 9 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (nX + 1)P(X).$$

1. Vérifier que φ est effectivement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de φ. Montrer que les seules racines possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1. En déduire les valeurs propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 10 – Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.

1. (a) g est un projecteur.
   (b) $\mathrm{Spec}(p) \subset \{0, 1\}$, $\mathrm{Spec}(q) \subset \{0, 1\}$, $\mathrm{Spec}(f) \subset 0, 1, 2$.
2. $0 \in \mathrm{Spec}(f)$ ssi $\mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$. Déterminer alors E_0.
3. $2 \in \mathrm{Spec}(f)$ ssi $\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q \neq \{0\}$. Déterminer alors E_2.

Exercice 11 – Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 4, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\ f$ et de $\mathrm{Ker}\ f$.
2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$ non nul. Montrer que y est un vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée ?
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.
3. Diagonaliser B.

Exercice 12 – (Oral HEC) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.
   En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – (Oral HEC) – Soient trois suites réelles définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n - c_n. \end{cases}$

Déterminer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de a_0, b_0, c_0 et n. Convergence ?

Exercice 14 – (Oral HEC) –

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. CNS sur a et b pour que A soit diagonalisable ?
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivante une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Soit M la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité de l'événement : « M est diagonalisable ».

Exercice 15 – (Oral HEC) – Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$. Les déterminer.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Retrouver 1.
3. Diagonaliser M. Retrouver 1.