Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sqrt{\frac{u_0^2 + \cdots + u_{n-1}^2}{2n}}.$$

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. Établir une relation de récurrence d'ordre 1 satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

5. En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant u_n \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $a_i \in [0, 1]$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Exercice 1 – Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leqslant \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}.$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Exercice 2 – Soit $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions définies par :

$$f(n) = n + 1 \qquad\qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n=0} \\ n - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et g. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous réels $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 2 – Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $M \geqslant 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \geqslant M$. Cette propriété revient à dire que la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers l'infini est $+\infty$. Cette propriété est-elle vérifiée pour une injection ? une surjection ?