Exercice 1 – On pose $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On note f l'application définie pour tout $z \neq \mathrm{i}$ par $f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D.
2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans $\mathbb{C}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
   (a) Montrer que pour tout z du domaine de définition D de h,
   $$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$
   (b) En déduire que h est une bijection de P sur P.

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 3 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 5 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (\mathrm{i} - 3)z + (4 - 3\,\mathrm{i}) = 0$

Exercice 6 – Le but de l'exercice est de montrer que si $\cos\theta = \frac{1}{p}$, où p est un entier impair au moins égal à 3, alors $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel (on dit que $\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}$ est incommensurable à π). On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{\theta}{\pi} = \frac{m}{n}$, avec m et n premiers entre eux.

1. Déterminer explicitement des fonctions polynomiales T_n et U_n, $n \in \mathbb{N}$, telles que pour tout réel θ, on ait :
   $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ et $\sin(n\theta) = \sin\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$.
   Indication : formule de Moivre.
2. Montrer que $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} (-1)^{j+1} \binom{n}{2j+1} (p^2-1)^j$, puis que n est pair et m impair.
3. Montrer que $1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{E}(\frac{n}{4})} (-1)^{j+1} \binom{\frac{n}{2}}{2j} (p^2-1)^j$. Conclure.