Exercice 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $a_i \in [0,1]$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Exercice 2 –

1. Expliciter la suite définie par la récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2.$$

2. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k x^k$.
4. Discuter, suivant la valeur de x, de l'existence de la limite de S_n.

Exercice 1 – Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, et soit

$$A + B = \{a + b, \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Montrer que A, B et $A + B$ admettent des bornes supérieures dans $\mathbb{R}$, et que ces bornes vérifient la relation : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 2 – Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $M \geqslant 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \geqslant M$. Cette propriété revient à dire que la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers l'infini est $+\infty$. Cette propriété est-elle vérifiée pour une injection ? une surjection ?

Exercice 1 –

1. En s'inspirant des suites arithmético-géométriques, expliciter la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + 2n + 3.$$

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$.

Exercice 2 –
Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, et soit a sa borne supérieure. On suppose que $a \notin A$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[a - \varepsilon, a]$ contient une infinité de points de A. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux éléments distincts x et y dans A tels que $|y - x| < \varepsilon$. Donner un contre-exemple si $a \in A$.