Moyenne de Cesaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $v_n=\dfrac{1}{n}(u_1+\cdots+u_n)$.
Soit $\ell\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers ℓ.
   Indication : On pourra commencer par le cas $\ell=0$, en coupant la somme $u_1+\cdots+u_n$ en deux à un rang N à partir duquel la valeur absolue de u_k est plus petite qu'un certain ε qu'on s'est fixé.
2. Montrer que si $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\dbinom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que pour tout $n\geqslant 1$, $2u_n\leqslant u_{n+1}+u_{n-1}$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_{n+1}-u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 2
Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites extraites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=S_{2n}$ et $v_n=S_{2n-1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$. On ne demande pas de déterminer la limite.

Exercice 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{-1}{u_n+1}$. Cette suite admet-elle une limite, finie ou infinie ?

Exercice 2 – Algorithme de Héron
Soit $a>0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1}-\sqrt{a}\right|\leqslant\dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n-\sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?
5. On prend $u_0=2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n-\sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.