Exercice 1 – *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$, et la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.*
L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0=1$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{2n+1}=f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2}=g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}>1$ et $u_{2n+2}>0$.
2. Étudier le sens de variation de $g\circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite ℓ.
5. Vérifier que ℓ est un point fixe de f et de g.
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, f et g. En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$.
2. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a les deux encadrements suivants :
$$2\leqslant u_n^2-u_{n-1}^2\leqslant 2+u_n-u_{n-1} \qquad \text{puis} \qquad 2n\leqslant u_n^2-1\leqslant 2n+u_n-1.$$
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1-\dfrac{1}{u_n}\leqslant\dfrac{2n}{u_n^2}\leqslant 1-\dfrac{1}{u_n^2}$.
5. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=a>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit, pour tout $n\geqslant 1$, $w_n=\dfrac{1}{u_n^2}-\dfrac{1}{u_{n-1}^2}$. Calculer w_n pour tout $n\geqslant 1$.
3. En calculant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w_k$ de deux manières différentes, déterminer la limite de $(nu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 – Expliciter, puis donner un équivalent simple de la suite définie par $u_0=0$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=3u_n+v_n$$
lorsque $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=4$. Même question lorsque $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=2n+2$.