Exercice 1 – Nature de la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$

Exercice 2 – Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite ℓ.
   (c) En remarquant que pour tout $n \geqslant 3$, $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, trouver un équivalent de $\ln(\beta_n)$, et en déduire que $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 3 – Nature de la série de terme général $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4 – Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$, $\quad v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$, $\quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et minorées par 0.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\dfrac{t}{t+1} < \dfrac{t+1}{t+2}$.
   (b) En considérant u_n^2, et en remarquant que $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)u_n}$, établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$
3. (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\lambda \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$.
   (b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
4. En considérant la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, établir : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\lambda}{2n}}$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda n}}$.

Exercice 5 – Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n n e^{-n}$.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
On pourra admettre dans tout l'exercice que :
$$\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3), \text{ si } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En étudiant la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, montrer que la série de terme général u_n^3 est convergente.
3. Montrer que les séries de termes généraux : $\ln\dfrac{\sin u_n}{u_n}$ et u_n^2 sont divergentes.
4. Étudier la convergence de la série $\sum u_n x^n$ pour toutes les valeurs du réel x.