

	Exercice 1 – Une démonstration combinatoire de la formule du binôme. Soit a et b deux entiers positifs ou nuls. On appelle chemin monotone de $(0, 0)$ vers (a, b) une succession de pas de longueur 1 vers la droite ou vers le haut, de point de départ $(0, 0)$ et de point d'arrivée (a, b). 1. Soit a et b deux entiers positifs. Quel est le nombre de chemins monotones de $(0, 0)$ à (a, b) ? 2. On suppose que l'on dispose de x couleurs différentes pour colorier les pas à droite, et y couleurs pour les pas montants. Combien y a-t-il de chemins coloriés différents de $(0, 0)$ à (a, b) ? 3. En comptant de deux manières différentes les chemins coloriés de longueur n, retrouver la formule du binôme pour $(x + y)^n$, dans le cas où x et y sont entiers positifs. Exercice 2 – 1. Montrer par récurrence que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$. 2. Soit E l'ensemble $\{1, \dots, p+n+1\}$. Soit $k \in E$. Compter le nombre de sous-ensembles de E à $p+1$ éléments dont le plus grand élément est k. 3. En comptant de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à $p+1$ éléments de E, retrouver la formule de la question 1.	
	Exercice 3 – Le but de cet exercice est de démontrer l'identité suivante, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > m$ $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 0 \quad (1)$ On rappelle que par convention, $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$. L'identité étant triviale pour $n \leq m$, on suppose que $n > m$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble constitué des paires d'ensembles (S, T) tels que $T \subset S \subset \{1, \dots, n\}$, et $T = m$. On désigne par $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des tels couples (S, T) tels que S soit pair, et $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ des couples (S, T) tels que S soit impair. On construit une application $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de la manière suivante : soit $(S, T) \in \mathcal{F}$, et soit x le plus grand élément de $\{1, \dots, n\}$ qui ne soit pas dans T. On définit alors $S' = S \cup \{x\}$ si $x \notin S$, et $S' = S \setminus \{x\}$ si $x \in S$. L'application Φ est alors définie sur (S, T) par $\Phi(S, T) = (S', T)$. 1. (a) Justifier l'existence de x. (b) Montrer que Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{G}$, et que Φ est une bijection. 2. En déduire l'identité (1).	
	Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $\llbracket 1, 0 \rrbracket$ désigne l'ensemble vide. 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments ? 2. Quel est le nombre de ces sous-ensembles ne contenant pas deux entiers consécutifs ? Indication : On pourra construire une bijection de l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n-k+1 \rrbracket$ dans l'ensemble des parties constituées d'éléments 2 à 2 non consécutifs de $\llbracket 1, n \rrbracket$ consistant à écarter les éléments d'un ensemble les uns des autres. (Essayer de comprendre pour des petites valeurs de k). 3. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (de cardinal quelconque) ne contenant pas deux entiers consécutifs. (a) Déterminer A_0 et A_1. (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. (c) Quel suite de nombres célèbre reconnaissez-vous ? 4. En déduire pour tout n une expression du nombre de Fibonacci F_n comme une somme de coefficients binomiaux.	