Pour tout entier strictement positif n, et pour tout réel non nul a, on considère le polynôme $P = (X+a)^n + (a-X)^n$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(z+a)^n + (a-z)^n = 0$.
2. Déterminer en fonction de la parité de n, le degré et le terme dominant du polynôme P.
3. En déduire la décomposition de P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. On suppose que $a = 1$ et $n = 2p$
   (a) Déterminer les coefficients du polynôme P et en déduire, si on pose $Y = X^2$, que le polynôme défini par T(Y)=P(X) vérifie :
   $$T(Y) = 2\sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} Y^k.$$
   (b) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2 \frac{(2k+1)\pi}{4p} = p(2p-1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes $F_n = \frac{1}{2^n n!}(X-1)^n(X+1)^n$, et on pose $P_n = F_n^{(n)}$. Les polynômes P_n sont appelés polynômes de Legendre.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $B_{n,k} = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.
   (a) Démontrer que $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}$.
   (b) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.
   (c) Déterminer la parité de P_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrer que : $F_n^{(p)}(1) = F_n^{(p)}(-1) = 0$.
4. Montrer que P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 1
On pose $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On note f l'application définie pour tout $z \neq \mathrm{i}$ par $f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D.
2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans $\mathbb{C}$ par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
   (a) Montrer que pour tout z du domaine de définition D de h,
   $$\operatorname{Im} h(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$
   (b) En déduire que h est une bijection de P sur P.

Exercice 2
Étude et représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.