

	Exercice 1 – Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u et v des endomorphismes de E. - Démontrer que : $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u)$ $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u - \dim E + \dim(\operatorname{Im} v + \operatorname{Ker} u)$. - En déduire que : $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim E \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \inf(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v).$ Exercice 2 – Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et α un nombre réel non nul. On considère $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P) = P(X + \alpha)$. - Montrer que f est un endomorphisme de E. - On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. - Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}. - Montrer que pour tout $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $p < q$, on a : $\sum_{k=p}^q (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$	
	Exercice 3 – Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M la somme des coefficients diagonaux de M. - Trace d'un endomorphisme. - Montrer que la trace tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. - Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. - Montrer que deux matrices semblables ont même trace. On peut donc définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie comme la trace d'une matrice associée dans une base quelconque de E, cette valeur ne dépendant pas du choix de E. - Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}({}^t A A) \geq 0$, avec égalité ssi $A = 0$. - Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ formée de matrices simples. - Caractérisation de la trace - Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et φ et φ' deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que (φ, φ') est liée dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi'$. - Soit φ une forme linéaire non nulle définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \operatorname{tr}$.	
	Exercice 4 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. La notation f^n désigne la puissance de composition (f composé n fois avec lui-même). Par convention $f^0 = \operatorname{id}$. On note $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $C_k = \operatorname{Im}(f_k)$, $N = \bigcup_{k=0}^{+\infty} N_k$ et $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} C_k$. - Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $C_{k+1} \subset C_k$. - Montrer que N et C sont des sous-espaces vectoriels stables par f f injectif $\iff N = \{0\}$ f surjectif $\iff C = E$. On suppose désormais que E est de dimension finie. - Montrer qu'il existe un entier naturel p (que l'on choisit le plus petit possible) tel que $N_p = N_{p+1}$ et qu'alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $N_{p+i} = N_p$ - Montrer que p est aussi le plus petit entier tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $C_{i+p} = C_p$. - En déduire que $C = C_p$ et $N = N_p$. - Montrer que $E = N \oplus C$. (dur) Montrer que $(\dim N_{k+1} - \dim N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (la suite des noyaux itérés « s'essouffle »).	