

	Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. - Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$. - Montrer que $B^2 = B + 2I$. - Déterminer les valeurs propres de B, et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ? - En utilisant une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B, justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. - Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I. - On s'intéresse maintenant aux puissances de B. - On pose pour tout $n \geq 2$, $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$, où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$. Justifier l'existence et l'unicité de Q_n et R_n, et déterminer R_n. - En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geq 0$. - Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, B et n qui a été obtenue pour $n \geq 0$ est encore valable pour les entiers négatifs.	
	Exercice 2 – Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Soit $a > 0$ un réel donné. À tout f de E, on associe la fonction $T_a(f)$ définie pour tout x réel par : $T_a(f) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$. - Montrer que pour tout f de E, $T_a(f)$ est bien définie, et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. - Montrer que $T_a(f)$ est constante ssi f est périodique de période $T = 2a$. - Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau. T_a est-il surjectif ? - Soit $n \geq 2$ un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que la restriction de T_a à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On notera encore T_a cette restriction. - Montrer que la matrice associée à T_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. En déduire les valeurs propres de T_a. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? - Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si le degré de f est égal à 2, f n'est pas vecteur propre de T_a. - Montrer que si f est vecteur propre de T_a, sa dérivée f' l'est également. En déduire les sous-espaces propres de T_a.	
	Exercice 3 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$. On veut montrer qu'alors, $A^{12} = I_2$. On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A. - Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$. En déduire que σ n'est pas vide. - Vérifier que la matrice A vérifie la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$. - Montrer que σ vérifie l'une et seulement l'une des deux propositions suivantes : $\sigma \subset \{-1, 1\}$ - il existe un entier p tel que $1 \leq p < \frac{n}{2}$, et $\sigma = \{e^{\frac{2ip\pi}{n}}, e^{-\frac{2ip\pi}{n}}\}$. Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2 \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$? - On suppose $\text{Card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$. - On suppose que $\sigma = 1$, et que $A \neq I_2$. - En utilisant la question 2, montrer que $\text{Ker}(A - I_2) = \text{Im}(A - I_2)$. - En déduire que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. - Calculer T^k pour tout $k \geq 1$. En déduire une contradiction. - Montrer que si $\sigma = -1$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction. - Conclure.	