Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$; on considère la matrice :

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne se déduisant de la précédente par une permutation circulaire (consistant en un decalage d'un rang vers la droite et retour en tête de l'élément final de la ligne précédente). Une telle matrice est appelée matrice circulante.

1. On considère la matrice $J = C(0, 1, 0 \dots, 0)$.
   Déterminer les valeurs propres complexes de J et les sous-espaces propres correspondant
2. (a) Exprimer J à l'aide des matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer J^k et montrer que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des matrices J^k.
   (c) Montrer que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est diagonalisable, et déterminer une matrice Γ semblable à $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Déterminer les valeurs propres de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie.

1. Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes de E.
   Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u_1 \circ u_2)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(u_2))$.
2. Généraliser ce résultat en prouvant que quels que soient les endomorphismes $u_1, \dots, u_n$ de E, on a :
   $$\dim(\mathrm{Ker}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim(\mathrm{Ker}(u_k)).$$
3. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$. Montrer que u est diagonalisable.
4. Plus généralement, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe un polynôme annulateur de u à racines simples. Montrer que u est diagonalisable.
5. Réciproquement, soit u un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que u admet un polynôme annulateur à racines simples.

Exercice 1 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $A^n = I_2$. On veut montrer qu'alors, $A^{12} = I_2$.
On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

1. Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$.
   En déduire que σ n'est pas vide.
2. Montrer que σ vérifie l'une des deux propositions suivantes :
   (i) $\sigma \subset \{-1, 1\}$
   (ii) il existe un entier p tel que $1 \leqslant p < \frac{n}{2}$, et $\sigma = \{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,p\pi}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,p\pi}{n}}\}$.
   Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$?
3. On suppose $\mathrm{Card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$.
4. On suppose que $\sigma = \{1\}$, et que $A \neq I_2$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Im}(A - I_2)$.
   (b) En déduire que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer T^k pour tout $k \geqslant 1$. En déduire une contradiction.
5. Montrer que si $\sigma = \{-1\}$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction.
6. Conclure.