Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $q \in [\![0,p]\!]$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \binom{pn}{qn}$.

1. (a) Étudier l'existence et la valeur ℓ de la limite de $\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Montrer que $\sum u_n x^n$ CVA si $|x| \leqslant \dfrac{1}{\ell}$, et DVG si $|x| > \dfrac{1}{\ell}$.
2. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \dfrac{u_n}{\ell^n}$.*
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\ln(u'_n)-\ln(u'_{n-1}) = \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(1-\frac{k}{np}\right) - \sum_{k=1}^{q-1} \ln\left(1-\frac{k}{nq}\right) - \sum_{k=1}^{p-q-1} \ln\left(1-\frac{k}{n(p-q)}\right)$$
   (c) En déduire que : $\ln u'_n - \ln u'_{n-1} = -\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (d) En déduire que : $\ln u'_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln n$.
   (e) En étudiant la limite de $(\ln(nu'_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, déterminer la nature de $\sum u'_n$.
3. (a) Justifier que $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, et est décroissante à partir d'un certain rang.
   (b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^n u'_n$. En considérant les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer la nature de $\sum(-1)^n u'_n$.

Préliminaire : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente de limite a, strictement positive, alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 : $u_n \geqslant \frac{a}{2}$.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x(1-x)$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Étudier les variations de f.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = nu_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.
3. On suppose $L \neq 1$, montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que
   $$\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}.$$
   En déduire que dans ce cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. En déduire que $L = 1$.
4. Montrer à l'aide de la question 3(b) que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente, $u_0 \neq 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Que peut-on dire de $\sum \dfrac{u_n}{U_n}$ lorsque $\left(\dfrac{u_n}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 ?
2. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_n}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Montrer que $U_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} U_n$, puis que
   $$\ln\left(\frac{U_{n-1}}{U_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{U_n}.$$
   Que peut-on dire de la série $\sum \dfrac{u_n}{U_n}$?
3. Soit $\alpha \in [0,1]$. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{U_n^\alpha}$.
4. Soit $\alpha > 1$. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{U_n^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, et en déduire la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{U_n^\alpha}$.