On considère la fonction F définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction F ?
2. Montrer que la fonction F est une fonction impaire.
3. Justifier la dérivabilité de F et calculer F'.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   En déduire la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ H(x) = x\displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.
   Établir que : $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$, en déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n \ln\left(1 + \dfrac{\ln n}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (-1)^n \cos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$
   (a) $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?
   (b) Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(-1)^n \ln^\beta n}{n^\alpha}$ converge.
   (c) En effectuant un DL, montrer que si $a > \frac{1}{6}$, la série $\sum u_n$ converge.
   (d) Comment généraliser ce résultat ?
2. On suppose maintenant que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\cos\sqrt[3]{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^{\frac{2}{3}}} \cdot \cos(\sqrt[3]{k})$.
   Soit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k) = \left(2k\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)^3$ et $\psi(k) = \left(2k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)^3$
   (a) La série $\sum u_n$ est-elle grossièrement divergente ?
   (b) Justifier que $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{\ln n}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot \cos(\sqrt[3]{n})$ sont de même nature.
   (c) Justifier que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\psi(k) - \varphi(k) \geqslant 8\pi^3 k^2 + 1$.
   (d) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S_{E(\psi(k))} - S_{E(\varphi(k))} \geqslant \pi \cdot \left(\dfrac{k}{k+\frac{1}{6}}\right)^2$
   (e) En déduire que $\sum u_n$ est divergente.

1. Étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer qu'il existe une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\displaystyle\int_x^{u(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
3. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier sa monotonie.
4. Montrer que le graphe de u est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.
5. Étudier les branches infinies.