Exercice 1 –

Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x\, \mathrm{d}x$.
   Justifier la convergence de cette intégrale.
2. En minorant convenablement $\sin t$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que la série de terme général u_n diverge.
3. En déduire la nature de $\int_{\pi}^{+\infty} |\sin x|^x\, \mathrm{d}x$

Exercice 1 –

Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{3} t^4 \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 2 – Transformée de Laplace

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, telle qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel positif k tels que pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $f(t) \leqslant kt^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\, \mathrm{d}t$. On notera $L(f)(x)$ sa valeur.
2. Soit x_0 un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel $x > \frac{x_0}{2}$, et tout réel $t \geqslant 0$, on a l'inégalité :
$$\left|\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-tx_0} + t(x-x_0)\mathrm{e}^{-tx_0}\right| \leqslant t^2 \frac{(x-x_0)^2}{2} \mathrm{e}^{-\frac{tx_0}{2}}.$$
3. En déduire que la fonction $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que
$$\forall x > 0,\ [L(f)]'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \cdot tf(t).$$

Exercice 1 –

Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}t$

Exercice 2 –

1. Déterminer les valeurs de x réelles pour lesquelles $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.
2. On pose alors $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, \mathrm{d}x$, et calculer sa valeur.