

	Exercice 1 – Pour α et β réels, on considère l'intégrale $I(\alpha, \beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt.$ - Déterminer et représenter le domaine de définition D de I dans $\mathbb{R}^2$. (a) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in D$, $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (1 - e^{-x})^\beta dx.$ - Calculer $I(n, 0)$, pour $n \in \mathbb{N}$. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\alpha, n \in D$, on a $I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)^{\alpha+1}}.$ - En déduire un équivalent simple de $I(\alpha, n)$ lorsque α tend vers $+\infty$ à n fixé. - Déterminer la limite de $I(\alpha, n)$ lorsque α tend vers $+\infty$, à n fixé.	
	Exercice 2 – Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$. - Déterminer le domaine de définition D de la fonction F. - Étudier le sens de variation de la fonction F. - Déterminer la limite de F en $+\infty$. (a) Justifier, pour $x \in D$, la convergence des intégrales $G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du.$ Montrer que $G(x) = -\ln x + G(1) + I + o(1)$. En déduire que $G(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. (b) Justifier la convergence de l'intégrale $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1} dt$. Montrer que $H(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. (c) Calculer la dérivée de la fonction g définie par $g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$. En déduire la convergence et la valeur de $J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t} \right) dt$. (d) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0^+.	
	Exercice 3 – Soit f la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$. - Déterminer l'ensemble de définition de f. - Montrer que f est monotone. - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$. - En utilisant les questions 2 et 3, déterminer la limite et un équivalent de f en 0 et $+\infty$. - Calculer $f(1)$ et $f(\frac{1}{2})$. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1)$ et $f(n + \frac{1}{2})$ en fonction de n. - En déduire que les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ sont convergentes, et calculer leurs sommes respectives.	