Exercice 1 – Donner le domaine de définitione et étudier la continuité en $(0,0)$ de f définie par
$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

Exercice 2 – Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y}\ :\ [-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ par $f_{x,y}(t)=xt^2+yt$, et on note :
$$F(x,y)=\sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t).$$

1. Calculer $F(x,y)$.
2. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 – Soit $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ et f une application continue de C dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ définie par
$$g(t)=f(\cos t,\sin t)-f(-\cos t,-\sin t).$$
Montrer que g est continue.
2. Montrer qu'il existe $(x,y)\in C$ tel que $f(x,y)=f(-x,-y)$.

Exercice 4 – Donner le domaine de définition et étudier la continuité en $(0,0)$ de f définie par
$$f(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Exercice 5 – Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} 2y & \text{si } x\geqslant y^2\\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x|\leqslant y^2 \text{ et } y\neq 0\\ -2y & \text{si } x\leqslant -y^2.\end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun $(A,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall(x,x',y)\in]-\alpha,\alpha[\times]-a,a[\times]-\beta,\beta[,\quad |f(x,y)-f(x',y)|\leqslant A|x-x'|.$$

Exercice 6 – Donner le domaine de définitione et étudier la continuité en $(0,0)$ de f définie par $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Exercice 7 – Soit K la fonction définie sur $[0,1]^2$ par
$$K(x,y)=\begin{cases} y(1-x) & \text{si } y\leqslant x,\\ x(1-y) & \text{si } x<y.\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de K.
2. Soit f continue sur $[0,1]$ et $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\ \mathrm{d}y.$$
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''.

Exercice 8 – Soit Ω l'ensemble des triplets $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$ tels que le polynôme aX^2+bX+c ait deux racines distinctes. On note alors α et β ces racines ($\alpha\leqslant\beta$).

1. Montrer que Ω est un ouvert.
2. Montrer que les applications définies sur Ω par $(a,b,c)\mapsto\alpha$ et $(a,b,c)\mapsto\beta$ sont continues sur Ω.