Exercice 1 – **Relation d'Euler**

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$
(on dit que f est homogène de degré α).
Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$.
2. Réciproquement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$\exists \alpha \geqslant 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$
Montrer que f est homogène de degré α.
3. Trouver, à l'aide de ce qui précède, toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}.$$

Exercice 2 – Plan tangent en $(0,0)$ du graphe de la fonction définie au voisinage de $(0,0)$ par
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}.$$

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$
Le but de l'exercice est de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la limite de g lorsque (x,y) tend vers (x_0,x_0), avec $x \neq y$, est $f'(x_0)$. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, exprimer $\dfrac{g(x_0+h,x_0)-g(x_0,x_0)}{h}$ en fonction de f.
Déterminer la limite de cette expression à l'aide d'une formule du cours.
3. Pour $x \neq y$ calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ en fonction de (x,y), et déterminer sa limite.
En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle laplacien de f la fonction
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$
On dit que f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $z = x+iy$, et $f(x,y) = \ln|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}|$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, harmonique sur U. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{y}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.