Exercice 1 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g).$$
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g).$$
3. Soit g un projecteur, alors $\mathrm{id} - g$ est un projecteur et $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}(\mathrm{id} - g)$, et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - g)$.
4. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :
$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

Exercice 2 – **Matrices symétriques - antisymétriques**
Soit n un entier naturel non nul, on note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A_n l'ensemble des matrices antisymétriquesde $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. (a) Montrer que A_n et S_n sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera les dimensions.
   (b) Montrer que S_n et A_n sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application $f : A_n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) = {}^tA \cdot M + M \cdot A$.
   (a) Montrer que f peut être considéré comme un endomorphisme de A_n.
   (b) Montrer que $\mathrm{tr}(f) = (n-1)\,\mathrm{tr}(A)$ (on rappelle que deux matrices semblables ont même trace)
3. (a) Soit N une matrice de S_n. Montrer que $N = 0 \iff \mathrm{tr}(N^2) = 0$.
   (b) Soit $(A, B) \in S_n^2$. Montrer que
$$AB = BA \iff \mathrm{tr}((AB - BA)^4) = 0.$$

Exercice 3 – Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et E_1 et F_1 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 + F_1$.

1. Montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel E_2 inclus dans F_1 et d'un sous-espace vectoriel F_2 inclus dans E_1 tels que
$$E = E_1 \oplus E_2 \qquad \text{et} \qquad E = F_1 \oplus F_2.$$
2. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à E_1 de direction E_2, et s' la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2. Démontrer que $s' \circ s = s \circ s'$.
3. Démontrer que $s' \circ s$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 4 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.