# Correction du Devoir Maison n° 1

**Exercice 1 –**

1. **Étude de la diagonalisabilité de $A$**

Cherchons les valeurs propres de $A$, c'est-à-dire les valeurs (dans $\mathbb{R}$, ou éventuellement dans $\mathbb{C}$) pour lesquelles $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible. Pour cela, nous effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_4$ :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 8-4\lambda & 4-4\lambda & -\lambda^2+8\lambda-11 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & -\lambda^2+6\lambda-5 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-2\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 5-\lambda \\ 0 & -2(\lambda-2) & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-1) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si la matrice triangulaire supérieure obtenue par des opérations élémentaires est non inversible, si et seulement si les coefficients diagonaux de cette dernière ne sont pas tous non nuls, si et seulement si $\lambda = 1, 2$ ou $3$. Ainsi, l'ensemble des valeurs propres de $A$ est $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}$.

On ne peut pas conclure tout de suite quant à la diagonalisabilité de $A$, car on n'est pas dans les cas extrêmes d'une seule valeur propre, ou d'un nombre de valeurs propres égal à l'ordre de la matrice. Déterminons donc la dimension des espaces propres.

**L'espace propre $E_1$.**

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $A - I_4$, on a :

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \mathrm{rg}\, M_1.$$

Or, $\mathrm{rg}\, M_1 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E_1 = 2$.

On peut dès à présent conclure que $A$ est diagonalisable. En effet $\dim E_2 \geqslant 1$ et $\dim E_3 \geqslant 1$, puisque 2 et 3 sont des valeurs propres de $A$. Ainsi, $\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 \geqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme les espaces $E_1$, $E_2$ et $E_3$ sont en somme directe, et sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a aussi l'inégalité réciproque. D'où l'égalité. D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, $A$ est donc diagonalisable. On a de plus acquis la dimension des espaces propres :

$$\dim E_1 = 2 \qquad \dim E_2 = 1 \qquad \dim E_3 = 1.$$

Sachant que $A$ est diagonalisable, cherchons-en une base de diagonalisation. Pour cela, commençons par trouver une base de $E_1$. On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} X \in E_1 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \qquad\qquad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2) \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'application $\varphi$ qui a $(x, y, z, t)$ associe $(z, t)$ (les variables ne correspondant pas à un pivot) est un isomorphisme de $E_1$ dans $\mathbb{R}^2$. Une base de $E_1$ est donc donnée par l'image réciproque par $\varphi$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit :

$$\left(\varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right), \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On aurait aussi pu remaquer directement que les colonnes de la matrice $M_1$ vérifient $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 + C_4 = 0$, ce qui fournit deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ dans le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à $M_1$, donc dans $E_1$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre de $E_1$, qui est de dimension 2. Donc ils forment une base de $E_1$.

**L'espace propre** $E_2$ On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$,

$$X \in E_2 \Longleftrightarrow M_2 X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0.$$

Les colonnes de $M_2$ vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $E_2$. Comme $E_2$ est de dimension 1, la famille constituée de ce seul vecteur est une base de $E_2$.

**L'espace propre** $E_3$ On a, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$,

$$X \in E_3 \Longleftrightarrow M_3 X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0.$$

Les colonnes de $M_3$ vérifient $C_3 + 2C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $E_3$. Comme $E_3$ est de dimension 1, la famille constituée de ce seul vecteur est une base de $E_3$.

Ainsi, on a :

$$D = P^{-1}AP, \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Étude de la diagonalisabilité de** $B$**.**

Cherchons à quelle condition sur $\lambda$ la matrice $B - \lambda I_4$ n'est pas inversible, en effectuant un pivot de Gauss sur cette matrice.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda & -4 \\ 3-\lambda & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 4-2\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow (2-\lambda)L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2-3\lambda+4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda^2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{pmatrix} = M_\lambda$$

Ainsi, la matrice $B - \lambda I_4$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 2\}$ (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$). Encore une fois, il est impossible de conclure immédiatement quant à la diagonalisabilité de $B$. Étudions donc les dimensions des espaces propres.

**L'espace propre $E_1$**

On a : $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $M_1$ est de rang 2.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - I_4) = 2$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - I_4$, on a donc

$$\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - I_4) = 4 - 2 = 2.$$

**L'espace propre $E_2$**

On a : $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $M_2$ est de rang 3.

Les opérations élémentaires concervant le rang, on a donc $\mathrm{rg}(B - 2I_4) = 3$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - 2I_4$, on a donc

$$\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}(B - 2I_4) = 4 - 3 = 1.$$

On a donc $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 < 4$, donc $B$ n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$).

2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$. Les relations de récurrence satisfaites par les quatre suites se résument matriciellement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n, \qquad \text{d'où} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X^n = A^n X_0.$$

Calculons donc $A^n$ à l'aide de la diagonalisation de $A$ donnée dans la question précédente. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = P(DP^{-1}P)^{n-1}DP^{-1} = PD^{n-1}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

$D$ étant diagonale, on a directement ses puissances :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Calculons donc $P^{-1}$, à l'aide de la méthode du pivot. Puisque $P$ est une matrice de passage d'une base à une autre, elle est inversible. Effectuons sur $I_4$ les mêmes opérations élémentaires que celles que l'on effectue sur $P$ pour la transformer en $I_4$ :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_4$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Faites tout de même la vérification !

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2^{n+1} & -2^n & -2^{n+1} & 2^n \\ 3^n & -3^n & -3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -(2^n-1) & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & 2-2^n & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 3^n-1 & -(3^n-1) & 2-3^n & 3^n-1 \\ 2(3^n-1) & -2(3^n-1) & -2(3^n-1) & 2\cdot 3^n-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérifiez que pour $n = 0$ et $n = 1$, on retombe bien sur $I_4$ et $A$ !

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -(2^n-1) & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & 2-2^n & -2(2^n-1) & 2^n-1 \\ 3^n-1 & -(3^n-1) & 2-3^n & 3^n-1 \\ 2(3^n-1) & -2(3^n-1) & -2(3^n-1) & 2\cdot 3^n-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} \\ 3-2^{n+1} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En passant, constatez que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, ce qui était loin d'être évident !

**Exercice 2** –

1. (a) Cherchons les valeurs propres de $A$ (réelles ou complexes), c'est-à-dire les valeurs $\lambda$ pour lesquelles $A - \lambda I_4$ est non inversible. Pour cela, posons $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et effectuons un pivot sur $A - \lambda I_4$ afin d'échelonner cette matrice pour savoir si elle est inversible ou non.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2-\lambda - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - (2-\lambda)L_4$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda(2-\lambda) & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \lambda(2-\lambda)L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2+\lambda^2(2-\lambda) & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda^2(2-\lambda))L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda(2-\lambda^2(2-\lambda)) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda-1)^3(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A - \lambda I_4$ est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire inférieure sont tous non nuls, donc si $(\lambda-1)^3(\lambda+1) \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}$.

Vous remarquerez que j'ai préféré me ramener à une matrice triangulaire inférieure, afin d'exploiter au mieux les nombreux zéros présents dans la matrice initiale.

Pour déterminer si $A$ est diagonalisable, il nous faut déterminer la dimension des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et $-1$.

**Espace propre $E_{-1}$ :**

D'après les opérations élémentaires ci-dessus, conservant le rang, on a :

$$\mathrm{rg}(A + I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A + I_4$, on a $\dim E_{-1} = 4 - 3 = 1$.

**Espace propre $E_1$ :**

De même, on a :

$$\mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A - I_4$, on a $\dim E_1 = 4 - 3 = 1$.

Par conséquent, $\dim E_1 + \dim E_{-1} < 4$, donc $A$ n'est pas diagonalisable.

(b) **Base de** $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$**.**

Pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \Longleftrightarrow MX = 0$, où $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\varphi$ l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & t \end{array}$$

(on ne conserve que les coordonnées correspondant à des colonnes sans pivot dans la matrice échelonnée). D'après le cours, $\varphi$ est un isomorphisme, donc une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ est obtenue en prenant l'image réciproque par $\varphi$ de la base canonique de $\mathbb{R}$. Calculons donc $\varphi^{-1}(1)$. Il s'agit du vecteur $(x,y,z,t)$, avec $t=1$, vérifiant

$$\begin{cases} -x + \quad y \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\; -y + \quad z \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\quad -z + t = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $z=1$, puis $y=1$, puis $x=1$. Ainsi, $\varphi^{-1}(1)=(1,1,1,1)$. Par conséquent, une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

**Base de** $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$**.**
Calculons dans un premier temps $(A-I_4)^2$ :

$$(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on obtient une réduite de Gauss égale à

$$M = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2 \Longleftrightarrow MX = 0$.
Soit $\varphi$ l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (z,t) \end{array}$$

(on ne conserve que les coordonnées correspondant à des colonnes sans pivot dans la matrice échelonnée). D'après le cours, $\varphi$ est un isomorphisme, donc une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$ est obtenue en prenant l'image réciproque par $\varphi$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculons donc $\varphi^{-1}(1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,1)$.
En résolvant $MX=0$,

- si $z=1$ et $t=0$, on trouve $y=2$ puis $x=3$.
- si $z=0$ et $t=1$, on trouve $y=-1$ puis $x=-2$.

Ainsi une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^2$ est $(\varphi^{-1}(1,0), \varphi^{-1}(0,1)) = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

**Base de** $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})^3$**.**
Calculons dans un premier temps $(A-I_4)^3$ :

$$(A-I_4)^3 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 1 & -3 & 3 & -1\\ -1 & 3 & -3 & 1\\ 1 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$, on obtient une réduite de Gauss égale à

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comme précédemment, en considérant $\varphi$ convenable, on obtient une base de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^3$, donnée par $\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(c) **Analyse :** Supposons que $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ soit une telle base. Alors :
- $f(b_1) = b_1$, donc $b_1 \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})$ ;
- $f(b_2) = b_1 + b_2$, donc $b_1 = (f-\mathrm{id})(b_2)$ ;
- $f(b_3) = b_2 + b_3$, donc $b_2 = (f-\mathrm{id})(b_3)$ ;
- $f(b_4) = -b_4$, donc $b_4 \in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})$.

Ainsi, le choix de $b_3$ détermine celui de $b_1$ et $b_2$, et est indépendant du choix de $b_4$. De plus, $(f-\mathrm{id})^2(b_3) = b_1 \neq 0$, alors que $(f-\mathrm{id})^3(b_3) = 0$, donc il va falloir choisir $f \in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^3 \setminus \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^2$.

**Synthèse :**

Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est dans $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^3$, d'après la question précédente. De plus, il n'est pas dans $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^2$, car, toujours d'après ce qui précède, le seul vecteur de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})^2$ vérifiant $z=0$ et $t=1$ est $\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$. On pose donc :

$$b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad b_2 = (f-\mathrm{id})(b_3) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad b_1 = (f-\mathrm{id})(b_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

De plus, il faut choisir $b_4$ dans $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})$. Or, $A + I_4 = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&-2&0&3\end{pmatrix}$. On a une relation immédiate entre les colonnes : $C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})$. Posons $b_4$ égal à ce vecteur.

Montrons que $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, montrons que la matrice $P$ de cette famille est inversible, en en trouvant une réduite de Gauss à l'aide de la méthode du pivot.

On complète tout de suite les résultats en faisant les mêmes opérations sur la matrice $I_4$, puisque nous seront amenés à calculer l'inverse de cette matrice $P$ pour le calcul de $A^n$.

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&1&1&0&0&0\\1&0&0&-1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&2&1&-1&0&0&0&1\end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&2&1&-1&0&0&0&1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\L_4 \leftarrow L_4 - L_1\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&-1&1&2&1&-1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&2&1&0&0&-1&0&1\end{array}\right) \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&-1&1&2&1&-1&0&0\\0&2&1&0&0&-1&0&1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&4&1&-2&1&0\\0&0&1&-4&0&1&-2&1\end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

On obtient une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux non non nuls, donc inversible. Les opérations élémentaires conservant le rang, la matrice $P$ est inversible, donc $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base. Dans cette base, la matrice de $f$ est la matrice $M$ donnée dans l'énoncé, puisque, par construction, $f(b_1) = b_1$, $f(b_2) = b_2 + b_1$, $f(b_3) = b_3 + b_2$ et $f(b_4) = -b_4$.

(d) On décompose $M$ en $M = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, et :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 3,\ N^n = 0.$$

De plus, on vérifie aisément que $DN = N = ND$, donc $N$ et $D$ commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}N^2.$$

Un calcul facile montre que $D^{n-1}N = N$ et $D^{n-2}N^2 = N^2$ (récurrence à partir de $DN = N$, ou directement). Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = D^n + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base, on a $A = PMP^{-1}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PMP^{-1}PMP^{-1} \cdots PMP^{-1} = PM^nP^{-1}.$$

Terminons le calcul de $P^{-1}$, en reprenant le pivot à l'endroit on nous l'avions laissé dans la question précédente :

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_4 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow 8L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

En effectuant pour finir $L_1 \leftarrow \frac{1}{8}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ et $L_4 \leftarrow -\frac{1}{8}L_4$, on obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une vérification rapide montre qu'on a bien $P^{-1}P = I_4$, donc nos calculs sont corrects.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & 0\\ 0 & 1 & n & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 2 & 2\\ 4 & -4 & -4 & 4\\ 1 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1+n & 1-n+\frac{n(n-1)}{2} & (-1)^n\\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & (-1)^{n+1}\\ 1 & 1+n & n+\frac{n(n-1)}{2} & (-1)^n\\ 1 & 2+n & 1+2n+\frac{n(n-1)}{2} & (-1)^{n+1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 2 & 2\\ 4 & -4 & -4 & 4\\ 1 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1+n & 1-\frac{3}{2}n+\frac{n^2}{2} & (-1)^n\\ 1 & n & -\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2} & (-1)^{n+1}\\ 1 & 1+n & \frac{n}{2}+\frac{n^2}{2} & (-1)^n\\ 1 & 2+n & 1+\frac{3}{2}n+\frac{n^2}{2} & (-1)^{n+1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 2 & 2\\ 4 & -4 & -4 & 4\\ 1 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Nous laisserons le résultat sous cette forme. Même si l'énoncé semble dire de calculer ce produit, ne vous laissez pas prendre au piège : vous risquez de perdre une demi-heure en calculs stériles, vous avez plus intéressant à faire.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = AU_n$.

   (b) Ainsi, étant donné $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$, donc :

$$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\\ u_{n+3}\end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

En notant $(A^n) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$, on obtient donc :

$$u_n = a_{1,2} + 2a_{1,3} + 3a_{1,4}.$$

IL nous faut donc trois coefficients de la matrice $A^n$, que nous allons calculer maintenant :
- $8a_{1,2} = 5 + 2 - 2n - 4 + 6n - 2n^2 - 3(-1)^n = 3 + 4n - 2n^2 - 3(-1)^n$.
- $8a_{1,3} = 3 - 2 + 2n - 4 + 6n - 2n^2 + 3(-1)^n = -3 + 8n - 2n^2 + 3(-1)^n$
- $8a_{1,4} = -1 - 2 + 2n + 4 - 6n + 2n^2 - (-1)^n = 1 - 4n + 2n^2 - (-1)^n$

Ainsi :

$$8u_n = 3 + 4n - 2n^2 - 3(-1)^n - 6 + 16n - 4n^2 + 6(-1)^n + 3 - 12n + 6n^2 - 3(-1)^n = 8n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.
Suivant les conditions initiales, ce même calcul aurait toujours donné comme résultat, un polynôme du second degré, plus $\lambda' - 1)^n$. C'est la solution générale de cette récurrence.

3. (a) Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1}\end{pmatrix}$ Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

   (b) Effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_p$ pour savoir à quelle condition elle est inversible. Nous nous ramènerons en fait comme précédemment à une matrice triangulaire inférieure. Commençons par effectuer une permutation circulaire des lignes afin de ramener la dernière ligne en haut :

ainsi :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_p) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1}\\
-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1
\end{pmatrix} & & L_1 - a_{p-1}L_p\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2}+\lambda a_{p-1} & 0\\
-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1
\end{pmatrix} & & L_1 - (a_{p-2}+\lambda a_{p-1})L_{p-1}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
a_0 & \cdots & (a_{p-3}+\lambda(a_{p-2}+\lambda a_{p-1}) & 0 & 0\\
-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & -\lambda & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Supposons qu'après un certain nombre d'opérations élémentaires, on soit arrivé, pour un certain $k \in [\![1, p-1]\!]$ à :

$$
\operatorname{rg}(A-\lambda I_p) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
a_0 & \cdots & \cdots & a_{k-1} & (a_k+\lambda(a_{k+1}+\cdots+\lambda(a_{p-2}+\lambda a_{p-1}))) & 0 & \cdots & 0\\
-\lambda & 1 & & & & & & \\
 & -\lambda & \ddots & & \text{\huge 0} & & & \\
 & & -\lambda & 1 & & & & \\
 & & & -\lambda & 1 & & & \\
 & & \text{\huge 0} & & -\lambda & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & -\lambda & 1
\end{pmatrix}
$$

Effectuons alors l'opération $L_1 \leftarrow L-1-(a_k+\lambda(a_{k+1}+\cdots+\lambda(a_{p-1}+\lambda a_{p-1})))L_{k+1}$. On obtient :

$$
\operatorname{rg}(A-\lambda I_p) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
a_0 & \cdots & \cdots & a_{k-1}+\lambda(a_k+\lambda(a_{k+1}+\cdots+\lambda(a_{p-2}+\lambda a_{p-1}))) & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-\lambda & 1 & & & & & & \\
 & -\lambda & \ddots & & \text{\huge 0} & & & \\
 & & -\lambda & 1 & & & & \\
 & & & -\lambda & 1 & & & \\
 & & \text{\huge 0} & & -\lambda & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & -\lambda & 1
\end{pmatrix}
$$

Ainsi, par un argument de récurrence sur $k$, on obtient :

$$
\operatorname{rg}(A-\lambda I_p) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}
(a_0+\lambda(a_1+\cdots+\lambda(a_{p-2}+\lambda a_{p-1}))) & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
-\lambda & 1 & \ddots & & \vdots\\
0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 1 & 0\\
0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1
\end{pmatrix}
$$

Cette matrice triangulaire inférieure est non inversible si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$(a_0+\lambda(a_1+\cdots+\lambda(a_{p-2}+\lambda a_{p-1}))) = 0.$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_0 + \lambda(a_1 + \cdots + \lambda(a_{p-2} + \lambda a_{p-1}))) = a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^p a_p$ (factorisation de l'algorithme de Hörner). Il s'agit donc du polynôme caractéristique.

Ainsi, les valeurs propres de $A$ sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

(c) En particulier, si le polynôme caractéristique n'admet que des racines simples (dans $\mathbb{C}$), alors $A$ admet $p$ valeurs propres distinctes (dans $\mathbb{C}$), donc, puisqu'elle est d'ordre $p$, elle est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible $P$ et des complexes $l_1, \dots, \lambda_p$, racines du polynôme caractéristique, tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{puis:} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Chaque coefficient de $A^n$ est donc une combinaison linéaire (dont les coefficients sont définis par ceux de $P$ et de $P^{-1}$) des expressions $\lambda_i^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0,$$

Ainsi, la première coordonnée $u_n$ est combinaison linéaire des $\lambda_i^n$. On retrouve bien la description usuelle de la solution générale des suites définies par une récurrence linéaire donc le polynôme caractéristique est à racines simples.

**Problème – (Étude de sous-espaces stables par un endomorphisme)** (ESCP-EAP Scientifique 2001)

**Partie I – Préliminaire.**

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} P(f)$, donc $P(f)(x) = 0$. Alors :

$$P(f)(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(f^k(x)),$$

et, par linéarité de $f$ :

$$P(f)(f(x)) = f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)\right) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0.$$

Ainsi, $f(x) \in \operatorname{Ker} P(f)$. On en déduit la stabilité de $\operatorname{Ker} P(f)$ par $f$.

2. (a) Soit $D$ une droite de $E$ stable par $f$, et $x$ un élément non nul de $D$. Alors $D = \mathbb{R}x$. Puisque $D$ est stable par $f$, on a alors $f(x) \in D$, donc $f(x) \in \mathbb{R}x$, et par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque $x$ est non nul, on en déduit que $\lambda$ est une valeur propre, et que $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$. Ainsi, $D$ est engendrée par un vecteur propre.

Réciproquement, soit $D$ une droite engendrée par un vecteur propre $x$, associé à une valeur propre $\lambda$. Ainsi, $D = \mathbb{R}x$. Soit $y \in D$. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y = \mu x$. On a alors :

$$f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\lambda x,$$

Ainsi, $f(y) \in D$. On en déduit que $D$ est stable par $f$.

(b) D'après la question précédente, il suffit de déterminer les vecteurs propres de $B$. La matrice $B$ étant diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, donc $\operatorname{Spec}(B) = \{1, 2\}$.

**Sous-espace propre $E_1$**

On a $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En faisant une permutation cyclique des lignes ($L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$), on obtient une matrice échelonnée ayant deux lignes non nulles, donc de rang 2. Les opérations élémentaires conservant le rang, $\operatorname{rg}(B - I_3) = 2$. D'après le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - I_3$, on en déduit que son noyau, égal à $E_1$, est de dimension 1. De plus, les colonnes de $B - I_3$ vérifient la relation $C_1 = 0$, donc le vecteur

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans $E_1$. En tant que vecteur non nul de $E_1$, de dimension 1, il forme à lui seul une base de $E_1$.

**Sous-espace propre $E_2$**

On a $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice échelonnée ayant deux lignes non nulles, donc de rang 2. D'après le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (de dimension finie) canoniquement associé à $B - 2I_3$, on en déduit que son noyau, égal à $E_2$, est de dimension 1. De plus, les colonnes de $B - 2I_3$ vérifient la relation $C_3 = 0$, donc le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans $E_2$. En tant que vecteur non nul de $E_2$, de dimension 1, il forme à lui seul une base de $E_2$.

Ainsi, les vecteurs propres étant soit colinéaires à $e_1$ soit colinéaires à $e_3$, les deux seules droites engendrées par des vecteurs propres sont $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_3$. Ce sont donc les deux seules droites stables par $g$ (de bases respectives $(e_1)$ et $(e_3)$)

3. *Soit $p$ un entier naturel non nul.*

   (a) Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$. Soit $x$ un élément de $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$. Alors, il existe $(x_1, \dots, x_p)$ dans $F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que

   $$x = x_1 + \cdots + x_p, \qquad \text{donc:} \qquad f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p).$$

   Or, les sous-espaces $F_k$, $k \in [\![1,p]\!]$, étant stables par $f$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $f(x_k) \in F_k$. On en déduit que $f(x)$ est élément de $F_1 \times \cdots \times F_p$.

   Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par $f$.

   (b) D'après la question précédente, il suffit de montrer que chaque espace $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$, $k \in [\![1,p]\!]$, est stable par $f$.

   Or, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est un polynôme en $f$, donc son noyau est stable par $f$ d'après la question I-1.

4. (a) Soit $\lambda$ un réel. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$. Soit $x \in F$. Alors $f(x) \in F$, et comme $F$ est un sous-esace vectoriel, $\lambda x \in F$, donc, $f(x) - \lambda x \in F$. Donc $F$ est stable par $f - \lambda Id_E$.
   Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f - \lambda Id_E$, et soit $x \in F$. Alors $f(x) - \lambda x \in F$. De plus, $F$ étant un sous-espace vectoriel de $E$, $\lambda x \in F$, donc $f(x) - \lambda x + \lambda x$ est dans $F$, puis $f(x) \in F$. Donc $F$ est stable par $F$.

   Par conséquent, les sous-espaces vetoriels de $E$ stables par $f$ sont exactement ceux stables par $f - \lambda Id_E$.

   (b) Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $f$. Soit $x \in F$. Alors $f(x) \in F$, puisque $F$ est stable par $f$, puis $f(f(x)) \in F$, donc $f^2(x) \in F$. Ainsi, $F$ est stable par $f^2$.
   Ainsi, tout sous-espace vectoriel stable par $f$ est aussi stable par $f^2$

   La réciproque est fausse. En effet, considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f$ canoniquement associé. Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors $f(e_1) = e_2$, donc $\mathbb{R}e_1$ n'est pas stable par $f$. En revanche, $A^2 = I_2$, donc $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, donc $\mathbb{R}e_1$ est évidemment stable par $f^2$.

   (c) Soit $f$ un automorphisme de $E$. Soit $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$. Alors $f(F) \subset F$. Soit alors $g$ l'endomorphisme de $F$ obtenu en restreignant $f$ à $F$ (cela donne bien un endomorphisme de $F$ du fait que $f(F) \subset F$). $f$ étant injective, $g$ l'est également. De plus, $E$ étant de dimension finie, $F$ l'est également. Ainsi, $g$ étant un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie, $g$ est un automorphisme de $F$. On en déduit que pour tout $x \in F$, il existe (un unique) $y \in F$ tel que $g(y) = x$, donc tel que $f(y) = x$. Par définition, $f$ étant bijective, on a alors $y = f^{-1}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in F$, $f^{-1}(x)$ est un élément de $F$. On en déduit que $F$ est stable par $f^{-1}$

   Ainsi, tout sous-espace stable par $f$ est stable par $f^{-1}$, et réciproquement.
   (La réciproque est obtenue en appliquant le sens direct à l'automorphisme $g = f^{-1}$)

(d) Soit $f$ un endomorphisme de $E$ laissant stable tout sous-espace vectoriel de $E$. En particulier, il laisse stable toute droite de $E$.

**Première méthode.**

On en déduit que pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{R}x$, puisque $\mathbb{R}x$ est stable par $f$, donc $x$ et $f(x)$ sont liés. Un exercice fait en TD nous assure alors que $f$ est une homothétie (je vous renvoie à vos notes pour une correction).

**Deuxième méthode.**

Toute droite est stable par $f$. Or, les droites stables sont exactement celles engendrées par des vecteurs propres. Par conséquent, tout vecteur non nul est vecteur propre de $f$.

Supposons que $f$ admette deux valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$. Les deux espaces propres $E_\lambda$ et $E_\mu$ sont en somme directe. Par conséquent, si $x$ et $y$ sont deux vecteurs propres associés à $\lambda$ et $\mu$ (donc non nuls), $x + y$ n'appartient ni à $E_\lambda$ ni à $E_\mu$ (sinon $x \in E_\mu$ ou $y \in E_\lambda$, ce qui contredirait que la somme est directe). Ainsi, tout vecteur non nul (c'est le cas de $x + y$, toujours du fait que la somme est directe) étant vecteur propre de $f$, on en déduit que $x + y$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\nu$, distincte de $\lambda$ et $\mu$. Alors $x + y \in E_\nu \cap (E_\lambda + E_\mu)$. Cette intersection est donc non réduite à $\{0\}$. On en déduit que la somme $E_\lambda + E_\mu + E_\nu$ n'est pas directe, ce qui contredit un théorème du cours sur les espaces propres.

Ainsi, $f$ ne peut pas admettre deux valeurs propres distinctes. Ainsi, tout vecteur non nul de $E$ est vecteur propre de la même valeur propre $\lambda$, donc pour tout $x \in E$ non nul (et nul aussi), $f(x) = \lambda x$. Par conséquent, $f$ est une homothétie.

(e) Un tel endomorphisme ne doit pas admettre de valeur propre (dans $\mathbb{R}$), sinon il admet un vecteur propre, et donc il existe une droite stable, d'après la question I-2a.

Réciproquement, un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'admettant par de valeur propre réelle n'admet aucun vecteur propre, donc il n'existe aucune droite stable par $f$. Les espaces stables sont donc nécessairement de dimension différente de 1, donc, puisque ce sont des sous-espace de $\mathbb{R}^2$, ils ne peuvent être égaux qu'à $\{0\}$ ou $\mathbb{R}^2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $f$ canoniquement associé. Alors $A - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si son déterminant est nul, donc si et seulement si

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Il n'existe pas de réel $\lambda$ satisfaisant cette équation , donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing$. D'après l'argument précédent, les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par $f$ sont donc $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$.

5. (a) C'est une question de cours.

Soit $H$ un hyperplan, et $S$ un supplémentaire. Alors $S$ est de dimension 1, donc engendré par un vecteur $x$. On a alors $H \oplus \mathbb{R}x = E$. On définit $\varphi : E \longrightarrow R$ par $\varphi(y) = \lambda$, où $y = h + \lambda x$ est l'unique décomposition de $y$ sous la somme $H \oplus \mathbb{R}x$. Alors $\varphi$ est une forme linéaire non nulle sur $E$, et de manière évidente, $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Réciproquement, soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle sur $E$. Alors, $E$ étant de dimension finie, d'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \dim \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

De plus, $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$ (car $\varphi$ est non nulle), donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim E - 1,$$

et on en déduit que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan de $E$.

(b) Soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle sur $E$, et $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

i. L'énoncé comporte visiblement une erreur, tel qu'il est écrit, il y a incohérence des espaces d'arrivée et de départ, puisque $\varphi \circ f$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}$, alors que $\lambda f$ est une application de $E$ dans $E$. Il s'agit sûrement de $\lambda\varphi$, ce que nous allons vérifier.

Supposons que $H$ est stable par $f$. Soit $S$ un supplémentaire de $H$, $S = \mathbb{R}x$. Alors $\varphi(f(x))$ et $\varphi(x)$ sont deux réels, et $\varphi(x) \neq 0$, car $x \notin \mathrm{Ker}\,\varphi = H$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x)$.

Soit $y \in E$. Alors il existe $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y = h = \mu x$. On a alors :

$$\varphi(f(y)) = \varphi(f(h)) + \mu\varphi(f(x)) = \mu\lambda\varphi(x),$$

puisque $\varphi(f(h)) = 0$, car $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est stable par $f$. De plus :

$$\varphi(y) = \varphi(h) + \mu\varphi(x) = \mu\varphi(x).$$

Ainsi, pour tout $y \in E$, $\varphi(f(y)) = \lambda\varphi(y)$, donc $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Il existe donc bien $\lambda \in RR$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Soit un tel $\lambda$. Soit $x \in H$. Alors $\lambda\varphi(x) = 0$, donc :

$$\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x) = 0, \qquad \text{puis:} \qquad f(x) \in \operatorname{Ker}\varphi \qquad \text{soit:} \qquad f(x) \in H.$$

Ainsi, $H$ est bien stable par $f\cdot$

ii. $H$ est stable par $f$ si ey seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$, donc tel que $LA = \lambda L$, donc, en transposant, tel que ${}^tA\ {}^tL = \lambda\ {}^tL$.

**Partie II – Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable.**

***Dans cette partie,*** *on considère un endomorphisme $f$ de $E$ diagonalisable, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes, et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.*

1. Si $p = 1$, alors $f$ est un endomorphisme diagonalisable ayant une seule valeur propre $\lambda$. Il existe donc une base dans laquelle sa matrice est $\lambda I_n$, donc $f = \lambda\mathrm{Id}_E$, et par conséquent, tout sous-espace de $E$ est stable par $f$.
2. *On suppose l'entier $p$ au moins égal à 2. On considère un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ stable par $f$, et un élément $x$ de $F$.*
   (a) Puisque $f$ est diagonalisable, $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k = E$, d'où l'existence de $(x_1, \dots, x_p)$. L'unicité provient du fait que la somme des espaces propres est directe.
   (b) $F$ étant un sev, on a $\lambda_1 x \in F$. De plus, $F$ étant stable par $f$, $f(x)$ est dans $F$. Ainsi, $f(x) - \lambda_1 x$ est élément de $F$. Or :

$$f(x) - \lambda_1 x = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 x_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 x_k = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k = \sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1)x_k,$$

   du fait que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $f(x_k) = \lambda_k x_k$, puisque $x_k$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_k$. Ainsi, ce dernier vecteur est un élément de $F$.
   (c) On raisonne (pour $x$ non nul) par récurrence descendante sur le nombre $k \in [\![1, p]\!]$ correspondant au plus petit indice tel que $x_k \neq 0$ dans la décomposition $x = x_1 + \cdots + x_p$.
   Si $k = p$, alors $x = x_p$, donc $x_p \in E_p$, et les autres vecteurs $x_k$ étant nuls, ils sont respectivement dans les espaces $E_k$ correspondants.
   Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que pour tout vecteur $y$ non nul de $F$ tel que le plus petit indice $k'$ correspondant à un vecteur non nul dans la décomposition $y = y_1 + \cdots + y_p$ vérifie $k' > k$.
   Soit, s'il en existe, $x = x_k + \ldots + x_p$ dans $F$, avec $x_k \neq 0$. Alors, comme précédemment, $f(x) - \lambda_k x$ est dans $F$. Or :

$$f(x) - \lambda_k x = \sum_{\ell=k+1}^{p} (\lambda_\ell - \lambda_k)x_k.$$

   D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à ce vecteur, pour tout $\ell \in [\![k+1, p]\!]$, $(\lambda_\ell - \lambda_k)x_k \in F$, et comme $\lambda_\ell \neq \lambda_k$, $x_\ell \in F$. On en déduit, du fait que $x_k + \cdots + x_p$ est dans $F$, que $x_k$ est dans $F$. Cela montre la propriété au rang $k$.
   D'après le principe de récurrence, on en déduit que la propriété est toujours vraie.
3. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $F$. Alors, soit $F_k = F \cap E_k$. On a alors $F = \sum\limits_{k=1}^{p} F_k$. En effet :

- Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $F_k \subset F$, donc $\sum_{k=1}^{p} F_k \subset F$.
- Soit $x \in F$. Alors il existe $x_1, \ldots, x_p$ dans $E_1, \ldots, E_p$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_p$. D'après la question précédente, les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont dans $F$. Ainsi, les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ sont éléments de $F_1, \ldots, F_p$ respectivement. Ainsi $x \in F_1 + \cdots + F_p$.

Réciproquement, soit pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $F_k$ un sous-espace vectoriel de $E_k$, et soit $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$. Soit $x \in F$. Il existe $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_p$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k,$$

car pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_k$ est dans $E_k$. Ainsi, puisque pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_k x_k \in F_k$, on en déduit que $f(x)$ est dans $F$. Ainsi, $F$ est stable par $f$.

4. Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $f$, et soit $g$ induit par $f$ sur $F$. D'après la question précédente, il existe des sous-espaces $F_k$ de $E_k$, $k \in [\![1,p]\!]$, tels que $F = \sum_{k=1}^{p} F_k$. Les espaces propres étant en somme directe, cette somme est également directe :

$$F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k.$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(g - \lambda Id_F) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \cap F$. Ainsi :
- si $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \{0\}$, donc aussi $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_F)$, et par conséquent, $\lambda$ n'est pas valeur propre de $g$ ;
- si $\lambda$ est valeur propre de $f$, $\lambda = \lambda_k$, $k \in [\![1,p]\!]$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_F) = E_k$, et $\mathrm{Ker}(g - \lambda_k Id_F) = F_k = E_k \subset F$. Ainsi, $\lambda_k$ est valeur propre de $g$ si et seulement si $F_k \neq \{0\}$, et dans ce cas, $F_k$ est le sous-espace propre associé à $\lambda_k$.

Ainsi, la somme des espaces propres de $g$ vaut :

$$\bigoplus_{\substack{k \in [\![1,p]\!] \\ F_k \neq \{0\}}} = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k = F.$$

La somme des espaces propres étant égale à l'espace $F$ tout entier (espace de définition de $g$), on en déduit, d'après un critère de diagonalisabilité du cours, que $g$ est diagonalisable.

5. Partons de la remarque suivante : S'il existe un sous-espace propre de dimension au moins 2, ce sous-espace admet une infinité de sous-espaces de dimension 1 (droites vectorielles). Chacune de ces droites est stable. Donc il existe une infinité de sous-espaces stables de $E$ par $f$.

Ainsi, $n$ étant la dimension de $E$, si le nombre de valeurs propres distinctes est différent de $n$ (donc plus petit strictement), alors, comme la somme des dimensions des espaces propres est $n$ ($f$ étant diagonalisable), on en déduit qu'il existe un espace propre de dimension au moins 2, donc il existe une infinité de sous-espaces stables par $f$.

Si le nombre de valeurs propres distinctes est égal à $n$, alors tous les espaces propres sont de dimension 1. Dans ce cas, tout $E_k$, $k \in [\![1,n]\!]$ admet exactement deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et lui-même. Ainsi, les sous-espaces stables $F$ sont décrits par :

$$F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n,$$

où pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k = \{0\}$ ou $k = E_k$. Ainsi, un tel sous-espace $F$ est déterminé par le choix d'un sous-ensemble $I$ de $[\![1,n]\!]$ correspondant aux indices $k$ pour lesquels $F_k = E_k$. L'ensemble des sous-espaces stables par $f$ est donc :

$$\{\bigoplus_{k \in I} E_k,\ I \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]).\}$$

Comme deux choix différents de $I$ donnent deux sous-espaces différents, on en déduit que le nombre de sous-espaces stables est égal au cardinal de $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$, c'est-à-dire $2^n$.

**Partie III – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre $n$.**

1. *On note $D$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme $P$ associe son polynôme dérivé $P'$.*
   (a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $D$, et $P$ un vecteur propre associé à $\lambda$. Alors $P' = \lambda P$, donc, si $\lambda \neq 0$, $\deg P' = \deg P$, ce qui n'est pas possible puisque $P \neq 0$. Ainsi, $\lambda = 0$ est la seule valeur propre possible. Elle est effectivement valeur propre, puisque tout polynôme constant $P$ vérifie $P' = 0 = 0 \cdot P$. Ainsi, tout polynôme sonstant non nul est vecteur propre associé à la valeur propre 0. Par conséquent, $\mathrm{Spec}(f) = \{0\}$.
   Si $D$ était diagonalisable, $D$ n'ayant qu'une valeur propre 0, il existerait une base dans laquelle sa matrice serait la matrice $0I_n$, donc la matrice nulle, ce qui signifierait que $D$ est l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas.
   Ainsi, $D$ n'est pas diagonalisable.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $D^n(P) = P^{(n)} = 0$, puisque $P$ est de degré strictement inférieur à $n$. Donc $D^n$ est l'endomorphisme nul.
   Soit $P = X^n$. Alors $D^{n-1}(P) = P^{(n-1)} = n(n-1)\cdots 1 = n! \neq 0$. Donc $D^{n-1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.
   (c) • Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $P \in F$. Alors $\deg(D(P)) \leqslant \deg P \leqslant k$ (l'inégalité est même stricte si $P \neq 0$), donc $D(P) \in \mathbb{R}_k[X]$. Par conséquent, $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par $D$.
   • Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$, et non réduit à $\{0\}$. Soit $P$ un polynôme de degré maximal dans $F$, et notons $k$ son degré. Montrons que $F = \mathbb{R}_k[X]$.
   Tout d'abord, puisque $k$ est le degré maximal des éléments de $F$, on a $F \subset \mathbb{R}_k[X]$.
   De plus, la famille $(D^k(P), D^{k-1}(P), \ldots, D(P), P)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, de degrés échelonnés, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_k[X]$. Son cardinal étant $k+1$ la dimension de $\mathbb{R}_k[X]$, c'en est une base. Or, $F$ étant stable par $D$, cette base de $\mathbb{R}_k[X]$ est constituée d'éléments de $F$. Ainsi, $\mathbb{R}_k[X] \subset F$.
   De cette double-inclusion, on déduit que $F = \mathbb{R}_k[X]$.
2. *On considère un endomorphisme de $E$ nilpotent d'ordre $n$, c'est-à-dire vérifiant les conditions : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.*
   (a) Soit $x$ un vecteur tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f^{n-i}(x)$. Montrons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$.
   Comme $E$ est de dimension $n$, il suffit de montrer que cette famille de cardinal $n$ est libre.
   Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que
   $$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$
   Montrons par récurrence descendante sur $i \in [\![1, n]\!]$ que $\mathcal{P}(i) : \lambda_i = \cdots = \lambda_n = 0$.
   Vérifions $\mathcal{P}(n)$ : on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_n = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^{n-k}(x) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f^{2n-k-1}(x) = 0,$$
   en composant par $f^{n-1}$. Or pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $2n-k-1 \geqslant n$, donc $f^{2n-k-1} = 0$. Le seul élément éventuellement non nul dans la somme est celui correspondant à $k = n$. Ainsi :
   $$\lambda_n f^{n-1}(x) = 0,$$
   et puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_n = 0$. D'où $\mathcal{P}(n)$.
   Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(i+1)$ soit vérifié. Alors $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, donc
   $$\sum_{k=1}^{i} \lambda_k e_k = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \sum_{k=1}^{i} \lambda_k f^{n-k}(x) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=1}^{i} \lambda_k f^{n+i-k-1}(x) = 0,$$
   en composant par $f^{i-1}$. Or pour tout $k \in [\![1, i-1]\!]$, $n+i-k-1 \geqslant n$, donc $f^{n+i-k-1} = 0$. Le seul élément éventuellement non nul dans la somme est celui correspondant à $k = i$. Ainsi :
   $$\lambda_i f^{n-1}(x) = 0,$$
   et puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, $\lambda_i = 0$. D'où $\mathcal{P}(i)$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vrai, et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathcal{P}(i+1)$ entraîne $\mathcal{P}(i)$. Par conséquent, $\mathcal{P}(i)$ est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On en déduit que les $\lambda_i$ sont tous nuls, et donc que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et est donc une base de $E$.

De plus, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $f(e_i) = f(f^{n-i}(x)) = f^{n-i+1}(x) = e_{i-1}$, et $f(e_1) = f^n(x) = 0$. Par conséquent, la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice $A$ décrite dans l'énoncé.

(b) Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = (i-1)!e_i$, et $\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_n)$. Il s'agit encore d'une base de $E$, puisque ses vecteurs sont déduits de la base $\mathcal{B}$ en multipliant ses éléments par des scalaires non nuls.

De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(b_i) = f((i-1)!e_i) = (i-1)!f(e_i) = (i-1)!e_{i-1} = (i-1)b_{i-1}$, et $f(b_1) = f(e_1) = 0$. Par conséquent, la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $B$ donnée dans l'énoncé. D'après les formules de changement de base, on en déduit que $A$ et $B$ sont semblables.

(c) On remarque que $B$ est aussi la matrice de $D$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Considérons $\varphi$ l'isomophisme de $E$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associant à tout élément $b_i$ de la base de $E$ l'élément $X^{i-1}$ de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $f = \varphi^{-1}D\varphi$.

Soit $F$ un sous-espace vectoriel stable par $D$. Alors $\varphi^{-1}(F)$ est stable par $f$. En effet, soit $x \in \varphi^{-1}(F)$. Alors $f(x) = \varphi^{-1}D\varphi(x)$. Or, $\varphi(x) \in F$, donc $D(\varphi(x)) \in F$, puisque $F$ est stable par $D$, puis $\varphi^{-1}D\varphi(x) \in \varphi^{-1}(F)$.

Réciproquement, soit $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$ ; alors il existe un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stable par $D$. En effet, soit $F = \varphi(G)$. Puisque $\varphi$ est un isomorphisme, on a bien $\varphi^{-1}(F) = G$, et de plus, $F$ est stable par $D$. En effet, soit $x \in F$. Alors il existe $y \in G$ tel que $\varphi(y) = x$, $y = \varphi^{-1}(x)$. On a alors $D(x) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$. Comme $\varphi^{-1}(x)$ est dans $G$ et que $G$ est stable par $f$, alors $f \circ \varphi^{-1}(x)$ est dans $G$, donc $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ est dans $\varphi(G) = F$. Ainsi, $D(x) \in F$.

On en déduit que les sous-espaces stables par $f$ sont exactement les images réciproques par $\varphi$ des sous-espaces stables par $D$, décrits en III-1c.

Ainsi, les sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$ sont $\{0\}$ et les sous-espaces $\mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_k)$, $k \in [\![1, n]\!]$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $k \in [\![1, n]\!]$.

Ainsi, les sous-espaces stables par $f$ sont $\{0\}$ et les sous-espaces $\mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_k)$, $k \in [\![1, n]\!]$

## Partie IV – Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

*Dans cette partie, on considère un endomorphisme $f$ de $E$ nipotent d'ordre 2, c'est-à-dire un endomorphisme non nul de $E$ tel que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul.*

1. *On considère un sous-espace vectoriel $F_2$ de $E$, vérifiant $F_2 \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.*

(a) De $f \circ f = 0$, on tire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. Or, $f(F_2) \subset \mathrm{Im}\, f$, donc $f(F_2) \subset \mathrm{Ker}\, f$.

(b) On a $\{0\} \subset F_1 \cap F_2 \subset \mathrm{Ker}\, f \cap F_2 = \{0\}$. Ainsi, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, et la somme $F_1 + F_2$ est donc directe.

Montrons que $F_1 \oplus F_2$ est stable par $f$. Soit $x \in F_1 \oplus F_2$. Il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$. Comme $F_1 \subset \mathrm{Ker}\, f$, on a $f(x_1) = 0$. De plus, $f(x_2) \in f(F_2)$, donc $f(x_2) \in F_1$. Ainsi,

$$f(x) \in F_1, \qquad \text{donc:} \qquad f(x) \in F_1 + F_2.$$

On en déduit que $F_1 + F_2$ est stable par $f$.

(c) Soit $A$, $B$, $C$ trois sous-espaces vectoriels de $E$. Alors :
- $A \cap C \subset A$ et $B \cap C \subset B$, donc $(A \cap C) + (B \cap C) \subset A + B$ ;
- $A \cap C subset C$ et $\cap C \subset C$, donc $(A \cap C) + (B \cap C) \subset C$.

Ainsi, $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.

On n'a pas nécessairement l'égalité, comme le montre l'exemple suivant :
- $E = \mathbb{R}^2$, de base canonique $(e_1, e_2)$ ;
- $A = \mathbb{R}e_1$, $B = \mathbb{R}e_2$, $C = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ ;
- $A \cap C = \{0\}$ et $B \cap C = \{0\}$, donc $(A capC) + (B \cap C) = \{0\}$ ;
- $(A + B) = \mathbb{R}^2$, donc $C \subset A + B$, donc $(A + B) \cap C = C = \mathbb{R}(e_1 + e_2) \neq \{0\}$.

(d) Montrons que $(F_1 + F_2) \cap \mathrm{Ker}\, f = F_1$ (remarquez que pour savoir quoi montrer, il est intéressant d'avoir lu la question suivante !)
- Soit $x \in F_1$. Alors, par hypothèse, $x \in \mathrm{Ker}\, f$. De plus, $x \in F_1 + F_2$. Donc $x \in (F_1 + F_2) \cap \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi, $F_1 \subset (F_1 + F_2) \cap \mathrm{Ker}\, f$.

- Soit $x \in (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$. Alors il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. De plus, $x \in \operatorname{Ker} f$, donc $0 = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$ (puisque $F_1 \subset \operatorname{Ker} f$). Ainsi, $x_2 \in \operatorname{Ker} f$, puis $x_2 \in F_2 \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Ainsi, $x_2 = 0$, d'où $x = x_1$, puis $x \in F_1$. On en déduit que $(F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f = F_1$.

  Des deux inclusions ci-dessus on déduit l'égalité $(F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f = F_1$.

2. On a toujours $f(F) \subset \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ puisque $f^2 = 0$.
   De plus, $F_2 \cap \operatorname{Ker} f = F_2 \cap F \cap \operatorname{Ker} f = F_2 \cap F_1 = \{0\}$, puisque $F_2 \subset F$ (première égalité), et que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $F$ (troisième égalité).
3. (a) Un calcul rapide montre que :

$$(M - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (M - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   À ordre près de ses lignes, la matrice $(M - I_4)^2$ est échelonnée, ayant deux lignes non nulles, donc son rang est 2, et par le théorème du rang, l'espace $G_1 = \operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})^2$ est de dimension 2. Comme les deux premières colonnes de $(M - I_4)^2$ sont nulles, les vecteurs $e_1$ et $e_2$ de la base canonique sont dans $G_1$. Formant une famille libre de cardinal 2 dans un espace de dimension 2, il s'agit d'une base de cet espace.
   De même, $(e_3, e_4)$ est une base de $G_2 = \operatorname{Ker}(h - 2\mathrm{Id})^2$
   La famille formée par la juxtaposition des deux bases de $G_1$ et $G_2$ étant une base de $\mathbb{R}^4$, les sous-espaces vectoriels $G_1$ et $G_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

   (b)
   - Soit $H$ un sous-espace vectoriel stable par $h$. Soit $H_1 = H \cap G_1$ et $H_2 = H \cap G_2$. D'après la question I-1, $G_1$ et $G_2$ sont stables par $h$. Par hypothèse $H$ est stable par $h$. L'intersection de deux sous-espaces stables étant de toute évidence stable, on en déduit que $H_1$ et $H_2$ sont stable par $h$.
   - Réciproquement, soit $H_1$ et $H_2$ des sous-espaces de $G_1$ et $G_2$ stables par $h$, et soit $H = H_1 + H_2$. Alors, d'après la question I-3a, $H$ est stable par $h$.

   (c) $M - I_4$ est échelonnée, de rang 3, de première colonne nulle. Donc une base de $\operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})$ est $(e_1)$. De même, une base de $\operatorname{Ker}(h - 2\mathrm{Id})$ est $(e_3)$.
   Soit $D$ une droite de $G_1$ stable par $h$. Alors, elle est aussi stable par $h - \mathrm{Id}$ d'après la question I-4a. Or, puisque pour tout $x \in G_1$, $(h - \mathrm{Id})^2(x)$, on obtient $(h - \mathrm{Id})(D) \subset \operatorname{Ker}(h - Id) = \mathbb{R}e_1$. Si $D$ n'est pas égal à $\operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})$, on obtient même égalité, puisque les vecteurs non nuls de $D$ ne sont dans ce cas pas envoyés sur 0. Ainsi, si $D \neq \mathbb{R}e_1$, $h(D) \not\subset D$, ce qui contredit la stabilité de $D$.
   La seule droite de $G_1$ qui puisse éventuellement être stable par $h$ (ou de manière équivalente par $h - \mathrm{Id}$) est donc $\mathbb{R}e_1 = \operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})$. La stabilité de cette droite est évidente, puisqu'elle est envoyée par $h - \mathrm{Id}$ sur 0.
   Conclusion : les sous-espaces de $G_1$ stables par $h$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}e_1$ et $G_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. De même, les sous-espaces de $G_2$ stables par $h$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}(e_3)$ et $\operatorname{Vect}(e_3, e_4)$.
   Les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ stables par $H$ sont donc des sommes de tels espaces. L'ensemble des sous-espaces stables par $h$ est donc :

$$\{\{0\}, \operatorname{Vect}(e_1), \operatorname{Vect}(e_3), \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \operatorname{Vect}(e_1, e_3), \operatorname{Vect}(e_3, e_4), \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3), \operatorname{Vect}(e_1, e_3, e_4), \mathbb{R}^4\}.$$

## Partie V – Existence d'un plan stable par un endomorphisme

*Soit $f$ un endomorphisme non nul de $E$.*

1. Soit $A$ la matrice de $f$ dans une base donnée de $E$. Alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n^2$. La famille $(A^k)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$, de cardinal $n^2 + 1$, ne peut pas être libre. Ainsi, il existe une relation entre les éléments de cette famille. Il existe donc des coefficients réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_0 A^0 + \cdots \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lambda_0 f^0 + \cdots \lambda_{n^2} f^{n^2} = 0.$$

   Ainsi, le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \lambda_k f^k$ annule $f$.
   *On note $M$ un polynôme non nul à coefficients réels de degré minimal annulant $f$. On observera que $M$ n'est pas constant*

2. *Dans cette question, on suppose que le polynôme $M$ n'a pas de racine réelle, et on note $z$ l'une de ses racines complexes.*

   (a) C'est une question de cours ! Notons $M = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors

   $$M(z) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \overline{M(z)} = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k = 0 \qquad \text{donc:} \qquad \sum_{k=0}^{d} a_k \overline{z}^k = 0,$$

   puisque les coefficients $a_k$ sont réels. Ainsi, $M(\overline{z}) = 0$.

   Par conséquent, puisque $z \neq \overline{z}$, $z$ n'étant pas réelle, ce sont deux racines distinctes, et donc $(X - z)(X - \overline{z})$ divise $M$. Ce polynôme de degré 2 est bien à coefficients réels puisque :

   $$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - X(z + \overline{z}) + z\overline{z} = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2.$$

   Notons $X^2 + bX + c$ ce polynôme.

   (b) Notons $N$ le quotient de $M$ par $X^2 + bX + c$. On a donc $M = (X^2 + bX + c)N$. Soit $g = f^2 + bf + c\mathrm{Id}$. On a donc :

   $$M(f) = g \circ N(f).$$

   Si $g$ était injective, alors, pour tout $x \in E$, on aurait :

   $$0 = M(f)(x) = g(N(f)(x)),$$

   puis, du fait de l'injectivité de $g$, $N(f)(x) = 0$. Ainsi, $N(f)$ serait l'endomorphisme nul, et donc $N$ serait un polynôme annulant $f$, de degré strictement plus petit que celui de $M$, ce qui contredirait la minimalité du degré de $M$.

   Par conséquent, $g$ n'est pas injectif.

   (c) On a donc $\mathrm{Ker}\, g \neq \{0\}$. Soit $x \in E$ un vecteur non nul tel que $g(x) = 0$. Soit $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$.
   - $F$ est un plan. Pour cela montrons que la famille $(x, f(x))$ est libre. Si ce n'était pas le cas, $x$ serait un vecteur propre, associé à une certaine valeur propre réelle $\lambda$. Or, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(f)$ est inclus dans l'ensemble des racines réelles du polynôme annulateur $M$, donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing$. Ainsi, on aboutit à une contradiction. Par conséquent, $(x, f(x))$ est libre, et $F$ est un plan.
   - Montrons que $F$ est stable par $f$. Pour cela, il suffit de montrer que les images de $x$ et $f(x)$ sont dans $F$. On a $f(x) \in F$, de manière évidente, et $f(f(x)) = -bf(x) - cx$, donc $f(f(x)) \in F$. Ainsi, $F$ est bien stable par $f$.

   On a bien trouvé un plan de $E$ stable par $f$.

3. *Dans cette question, on suppose qu'il existe un réel $\lambda$, un réel $\alpha$ non nul et un entier $p$ au moins égal à 2 vérifiant l'égalité : $M = \alpha(X - \lambda)^p$. On pose $g = f - \lambda\mathrm{Id}_E$.*

   (a) $M$ étant un polynôme annulateur de degré minimal, on a $g^p = 0$ et $g^{p-1} \neq 0$. Soit $x$ un vecteur tel que $g^{n-1}(x) \neq 0$. En s'inspirant de l'argument exposé dans la question III-2a, la famille $(x, g(x), \dots, g^{p-1}(x))$ est libre.

   (b) Puisque $p \geqslant 2$, on en déduit en particulier que $(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))$ est une famille libre. Ainsi, ils engendrent un plan, que l'on note $F$.

   Pour montrer que $F$ est stable par $f$, il suffit de montrer qu'il est stable par $g$ (question I-4a), et pour cela, il suffit de montrer que les images par $g$ de $(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))$ sont dans $F$. Or :
   - $g(g^{p-2}(x)) = g^{p-1}(x) \in F$,
   - $g(g^{p-1}(x)) = g^p(x) = 0 \in F$.

   Ainsi, $F$ est un plan stable par $g$, donc par $f$.

4. Il faut bien sûr supposer que $n = \dim E$ est au moins égal à 2, sinon le résultat est bien sûr faux, puisqu'il n'existe pas de plan de $E$ ! Soit donc $n \geqslant 2$. On étudie plusieurs cas possibles :
   - Si $f$ n'admet aucune valeur propre réelle, il existe un plan stable d'après V-2c.
   - Si $f$ admet au moins deux valeurs propres réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$, soit $X_1$ et $X_2$ deux vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Alors $(X_1, X_2)$ est libre (car les espaces propres sont en somme directe), donc engendrent un plan $F = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$. De plus, d'après la question I-2a, $\mathbb{R}X_1$ et $\mathbb{R}X_2$ sont stables par $f$ donc leur somme $F$ également.
   - Si $f$ admet exactement une valeur propre réelle $\lambda$, alors $\lambda$ est racine de $M$ ;

∗ Si $\lambda$ est racine multiple de $M$, disons de multiplicité $p$, notons $M = (X-\lambda)^p N$. Soit $G$ le sous espace de $E$ égal à $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^p$. Alors, d'après I-1, $G$ est stable par $f$. Soit $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $G$ induit par $f$ (la restriction et la corestriction de $f$ à $G$). Alors $\mathrm{Ker}(\tilde{f}-\lambda\mathrm{Id})^p = G$, donc $(\tilde{f}-\lambda\mathrm{Id})^p = 0$ est nilpotent. De plus,

$$\mathrm{Ker}(\tilde{f}-\lambda\mathrm{Id})^{p-1} = \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1} \cap G = \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1}.$$

Or, $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1}$ est inclus strictement dans $G$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas (on a égalité entre ces deux espaces). Alors soit $x \in E$. On a $M(f)(x) = 0$, donc $(f-\lambda\mathrm{Id})^p \circ N(f)(x) = 0$. Ainsi,

$$N(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^p \qquad \text{donc:} \qquad N(f)(x) \in \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1}$$

et par conséquent, $(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1} \circ N(f)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $(X-\lambda)^{p-1}N$ est un polynôme annulateur de $f$, ce qui contredit la minimalité du degré de $M$.
Ainsi, l'hypothèse initiale est fausse, et $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})^{p-1}$ est strictement inclus dans $G$, et donc $\mathrm{Ker}(\tilde{f}-\lambda\mathrm{Id})^{p-1}$ est strictement inclus dans $G$. Par conséquent, $(\tilde{f}-\lambda\mathrm{Id})^{p-1} \neq 0$.
Nous pouvons donc appliquer la question V-3b à l'ndomorphisme $\tilde{f}$ de $G$ : il existe un plan $F$ inclus dans $G$, donc dans $E$, stable par $\tilde{f}$, donc par $f$.

∗ Si $\lambda$ est racine simple de $f$, deux cas peuvent se produire :
  - Si $M$ est de degré 1, alors $(X-\lambda)$ annule $f$, donc $f = \lambda\mathrm{Id}$, et tout plan de $E$ est stable par $f$. Comme on a supposé que $n \geqslant 2$, il existe au moins un plan $F$ dans $E$, d'où l'existence d'un plan stable par $f$.
  - Si $M$ est de degré strictement plus grand que 1, notons $M = (X-\lambda)N$. Considérons $G = \mathrm{Ker}\, N(f)$. D'après I-1, $G$ est stable par $f$. On peut donc considérer $\tilde{f}$, l'endomorphisme de $G$ induit par $f$. Par définition de $G$, on a $N(\tilde{f}) = 0$. De plus, supposons qu'il existe un polynôme $P$ non nul de degré strictement plus petit que $n$ tel que $P(\tilde{f}) = 0$. Alors $\mathrm{Ker}(P(\tilde{f})) = G$, donc $G \subset \mathrm{Ker}(P(f))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ N(f)\circ(f-\lambda\mathrm{Id})(x) = 0 \qquad & \text{donc:} \qquad (f-\lambda\mathrm{Id})(x) \in \mathrm{Ker}(N(f)) = G, \\ & \text{donc:} \qquad (f-\lambda\mathrm{Id})(x) \in \mathrm{Ker}(P(f)), \\ & \text{donc:} \qquad P(f)\circ(f-\lambda\mathrm{Id})(x) = 0. \end{aligned}$$

    Ainsi, $(X-\lambda)P$ est un polynôme non nul annulant $f$ de degré plus petit que celui de $M$, ce qui contredit la minimalité du degré de $M$.
    On en déduit que $N$ est un polynôme annulateur de $\tilde{f}$ de degré minimal. Ce polynôme annulateur n'a pas de racine réelle, puisque $\lambda$ était la seule racine, supposée simple, de $M$. Ainsi, on peut appliquer la question V-2 à $\tilde{f}$. Il existe donc un plan de $G$ (donc de $E$) stable par $\tilde{f}$ (donc par $f$).