Correction du Devoir Maison n° 5 – révisions V.A.R.D.

Problème 1 – Étude des séries de lancers identiques dans une suite de tirages à Pile ou Face
(D'après Ecricome 2006)

Partie I – Étude des longueurs de séries.

1. (a) L'événement $[L_1 = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n Pile suivi d'un Face, ou n Face suivi d'un Pile. Ainsi :

$$\boxed{[L_1 = n] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i \cap F_{n+1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i \cap P_{n+1}\right).}$$

(b) Les événements $P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}$ sont incompatibles, donc

$$P(L_1 = n) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

De plus, les lancers sont mutuellement indépendants, donc

$$P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) = P(P_1) \cdots P(P_n) \cdot P(F_{n+1}) = p^n q,$$

et de même

$$P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}) = P(F_1) \cdots P(F_n) \cdot P(P_{n+1}) = q^n p,$$

Ainsi,

$$\boxed{P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.}$$

(c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + q^n p.$$

Comme les deux séries $\sum p^n q$ et $\sum q^n p$ convergent (ce sont des séries géométriques de paramètres dans $]-1, 1[$), on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p = q \cdot \frac{p}{1-p} + p \cdot \frac{q}{1-q}.$$

Comme $1 - p = q$, $1 - q = p$ et $p + q = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.}$$

(d) Soit A l'événement « la série s'arrête ». L'événement A est réalisé si et seulement si il existe un entier n tel que la série soit de longueur n, donc si la série est de longueur 1, ou de longueur 2, ou de longueur 3, etc. Ainsi,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [L_1 = n].$$

Les événements de cette union sont deux à deux incompatibles, et en nombre dénombrable. Comme P est σ-additive, on en déduit que

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$

Ainsi, A se réalise de manière presque certaine, autrement dit :

$$\boxed{\text{la première série s'arrête presque sûrement.}}$$

2. (a) Soit n et k deux entiers strictement positifs. L'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ est réalisé si et seulement si on a une succession de n Pile suivie d'une succession de k Face, suivie d'un Pile, ou une succession de n Face, suivie d'une succession de k Pile, suivie d'un Face. Ainsi :

$$[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup \\ \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}).$$

Ainsi, les événements $P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}$ étant incompatibles, et les tirages étant mutuellement indépendant, on obtient :

$$P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = P(P_1) \cdots P(P_n) \cdot P(F_{n+1}) \cdots P(F_{n+k}) \cdot P(P_{n+k+1}) + \\ + P(F_1) \cdots P(F_n) \cdot P(P_{n+1}) \cdots P(P_{n+k}) \cap P(F_{n+k+1}),$$

d'où $\boxed{P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k.}$.

(b) D'après la question I-1(c), $([L_1 = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements non quasi-impossibles, donc, d'après la formule des probabilités totales

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(L_2 = k \mid L_1 = n)P(L_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k])$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}q^k + \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1}p^k = q^k \frac{p^2}{1-p} + p^k \frac{q^2}{1-q},$$

et par la même observation que dans la question I-1(c), on obtient

$$\boxed{P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.}$$

(c) On a alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k + q^2 \sum_{k=0}^{+\infty} p^k = \frac{p^2}{1-q} + \frac{q^2}{1-p} = p + q,$$

et par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1.}$$

De même que pour L_1, ce résultat signifie que presque sûrement, il y a une deuxième série, et cette deuxième série se termine. Ainsi, l'événement « on ne commence pas une troisième série » est quasi-impossible.

(d) Les séries $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$ convergent absolument, d'après la formule de binôme négatif (il s'agit de séries dérivées de la série géométrique), car leur paramètre est dans $]-1, 1[$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k)$ converge absolument, d'où l'existence de l'espérance de L_2. On a alors :

$$E(L_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2},$$

d'après la formule du binôme négatif. Comme $1 - p = q$ et $1 - q = p$, on en déduit que :

$$\boxed{E(L_2) = 1 + 1 = 2.}$$

Partie II – Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. • Après un lancer, on ne peut avoir qu'une seule série, constituée d'un seul Pile, ou d'un seul Face. Ainsi, N_1 est la variable aléatoire certaine de valeur 1, c'est-à-dire $N_1(\Omega) = \{1\}$, et $\boxed{P(N_1 = 1) = 1}$. On a alors $\boxed{E(N_1) = 1}$.

   • Après deux lancers, soit on a obtenu deux fois le même côté (une série), soit on a obtenu deux cotés différents (2 séries). Ainsi, $N_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$.
   De plus, l'événement $[N_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu deux Face ou deux Pile, donc $[N_2 = 1] = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$. Les événements $P_1 \cap P_2$ et $F_1 \cap F_2$ étant incompatibles, les deux tirages étant indépendants, et la pièce étant équilibrée, on obtient :

$$\boxed{P(N_2 = 1) = P(P_1)P(P_2) + P(F_1) + P(F_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.}$$

   Alors, $[N_2 = 2]$ étant l'événement complémentaire de $[N_2 = 1]$,

$$\boxed{P(N_2 = 2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

   On en déduit que $E(N_2)$ existe (variable aléatoire finie) et

$$\boxed{E(N_2) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.}$$

   • Après trois lancers, on peut avoir obtenu 1, 2 ou 3 séries, donc $N_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
   L'événement $[N_3 = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu trois fois le même côté, donc $[N_3 = 1] = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$. Les événements $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ et $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ étant incompatibles, et les lancers étant mutuellement indépendants, on en déduit que

$$\boxed{P(N_3 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.}$$

   L'événement $[N_3 = 3]$ est réalisé si et seulement si on a changé de côté à chaque lancer, donc $[N_3 = 1] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$. Les événements $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ et $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ étant incompatibles, et les lancers étant mutuellement indépendants, on en déduit que

$$\boxed{P(N_3 = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.}$$

   Alors, puisque $[N_3 = 2] = \overline{[N_3 = 1] \cup [N_3 = 3]}$, on obtient :

$$\boxed{P(N_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lors des n premiers lancers, on a au minimum une série, et au maximum n séries (une altéernance de Pile et Face). Toutes les solutions intermédiaires sont possibles bien sûr. Ainsi, $\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.
   L'événement $[N_n = 1]$ est réalisé si et seulement si les n tirages ont amené le même côté de la pièce, donc si on a tiré n Pile consécutifs, ou n Face. Ainsi,

$$[N_n = 1] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n).$$

   Les événements $P_1 \cap \cdots \cap P_n$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ étant incompatibles, et les tirages étant mutuellement indépendants, on en déduit que :

$$\boxed{P(N_n = 1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

L'événement $[N_n = n]$ est réalisé si et seulement si on change de série à chaque lancer, donc si on ne tire pas deux fois de suite le même côté de la pièce. Ainsi :

$$[N_n = n] = \begin{cases} (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par conséquent, les deux événements formant cette union étant incompatibles, et les tirages étant mutuellement indépendants, on en déduit que :

$$\boxed{P(N_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

3. **Simulation informatique.**

Liste des erreurs :
- `program` et non `programme` ;
- la variable `i` (entière) n'a pas été déclarée ;
- Il faut des apostrophes autour du texte qu'on veut afficher (il est affiché en tant que chaîne de caractères) : `writeln('Entrez une valeur de m');`
- il manque un point-virgule après `random(2)` ;
- dans l'affectation incomplète de la boucle for, il faut un « : » avant le « = » ;
- il ne faut surtout pas de point-virgule après `do` : ce point-virgule marque la fin de la boucle, par conséquent, la boucle est vide !
- Dans le dernier affichage, le délimiteur de texte est l'apostrophe et non les guillemets. De plus, texte et valeur doivent être séparés d'une virgule.
- Le programme se termine par un point et non un point-virgule.

Ajouts à faire au programme :
- Il faut lire la valeur de m entrée par l'utilisateur : `readln(m);`
- i est le compteur de lancers. Le premier lancer étant effectué à part (initialisation de X), la boucle commence pour $i = 2$.
- Le but est de compter le nombre de séries, donc le nombre de changements de côté de la pièce. Ainsi, pour chaque tirage, on compare le résultat obtenu avec le résultat du tirage précédent, et en cas de changement, on ajoute 1 à N, le nombre de série. Ces opérations sont effectuées dans les trois instructions qui suivent `do`. Ainsi, ces trois instructions doivent être placées dans la boucle `for`. On est donc obligé de créer une instruction composée en entourant ces trois instructions d'un `begin` et d'un `end` ;
- Il faut simuler le lancer suivant (stocké dans Y), ce qui se fait avec `random(2)`, comme précisé dans l'énoncé ;
- il faut préciser quoi faire sur N lorsque $X \neq Y$, c'est-à-dire lorsque qu'un lancer est différent du précédent : dans ce cas, on change de série, et il faut ajouter 1 à N.

Voilà le programme corrigé et complété :

```
program simulation;

var X,Y,N,m,i : integer;

begin
  writeln('Entrez une valeur de m');
  readln(m);
  randomize;
  X:=random(2);                {tirage initial: 1 correspond à Pile
                                                 0 correspond à Face}
  N:=1;
  for i:= 2 to m do
    begin
      Y:= random(2);           {simulation du lancer suivant}
      if Y <> X then N:=N+1;
      X:=Y;
    end;
  writeln('N_m=',N);
end.
```

4. **Fonction génératrice de N_n**

(a) Soit $s \in [0,1]$. D'après le théorème de transfert, $G_n(s) = E(s^{N_n})$.

(b) G_n est dérivable sur $[0,1]$ en tant que somme (finie) de fonctions dérivables sur $[0,1]$, et :

$$\forall s \in [0,1], \quad G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)s^{k-1}.$$

Par conséquent : $\boxed{G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n).}$

(c) L'événement $[N_n = k] \cap P_n$ est réalisé si et seulement si on a obtenu lors des n premiers lancers k séries, la dernière étant une série de Pile. Alors,

- soit on a obtenu Face au $n-1$-ième lancer, ce qui signifie que la k-ième série est constituée d'un seul lancer (le n-ième) ; cela se produit si et seulement si on a obtenu $k-1$ séries lors des $n-1$ premiers lancers, la dernière étant une série de Face (ce qui revient à dire que F_{n-1} est réalisé) ; cela correspond à l'événement $[N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n$;
- soit on a obtenu Pile au $n-1$-ième lancer, ce qui signifie que la k-ième série est déjà commencée à l'issue du $n-1$-ième tirage. Cela se produit si et seulement si on a obtenu k séries lors des $n-1$ premiers lancers, la dernière étant une série de Pile (ce qui revient à dire que F_{n-1} est réalisé) ; cela correspond à l'événement $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n$.

Par conséquent, ces deux événements étant incompatibles, on obtient :

$$P([N_n = k] \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) + P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n).$$

Comme N_{n-1}, P_{n-1} et F_{n-1} ne dépendent que des $n-1$ premiers tirages, et P_n uniquement du n-ième, et que les tirages sont mutuellement indépendants, on en déduit que P_n et $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}$ sont indépendants, ainsi que P_n et $[N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}$. Ainsi,

$$P([N_n = k] \cap P_n) = P(P_n) \cdot P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + P(P_n) \cdot P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}),$$

puis

$$\boxed{\frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).}$$

De même, $[N_n = k] \cap F_n$ est réalisé si et seulement si

- on a obtenu $k-1$ séries après $n-1$ lancers, la dernière série étant des Face, et un Pile au n-ième lancer ;
- ou on a obtenu k séries après n lancers, la dernière série étant des Pile, puis un Pile au n-ième lancer, qui rallonge la k-ième série.

Ainsi, les deux événements décrits ci-dessus étant incompatibles,

$$P([N_n = k] \cap F_n) = P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1} \cap F_n) + P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1} \cap F_n).$$

Par le même argument d'indépendance que ci-dessus, on obtient donc :

$$\boxed{P([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}).}$$

(d) $\{P_n, F_n\}$ étant un système complet, on a

$$[N_n = k] = ([N_n = k] \cap F_n) \cup ([N_n = k] \cap P_n),$$

cette union étant disjointe. Ainsi,

$$P(N_n = k) = P([N_n = k] \cap F_n) + P([N_n = k] \cap P_n).$$

On déduit alors de la question précédente que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}\left(P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1})\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1})\right)$$

Comme $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ est un système complet, on en déduit que

$$\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).}$$

(e) Soit $n \geqslant 2$. On a, pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1)s^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=0}^{n-1} P(N_{n-1})s^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k)s^k + \frac{s}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1})s^k, \end{aligned}$$

car $P(N_{n-1} = 0) = P(N_{n-1} = n) = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{G_n(s) = \frac{1}{2}\cdot G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}\cdot G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}\cdot G_{n-1}(s).}$$

(f) On a, pour tout $s \in [0,1]$, $\boxed{G_1(s) = sP(N_1 = 1) = s.}$ Ainsi, à s fixé, $(G_n(s))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall s \in [0,1],\quad G_n(s) = s\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}}.$$

(g) D'après la question II-4(b), $E(N_n) = G_n'(1)$? Calculons donc la dérivée de G_n. Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$, puisqu'il s'agit d'une fonction polynomiale. De plus,

$$\forall s \in [0,1], G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + \frac{s(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(N_n) = G_n'(1) = 1^{n-1} + \frac{n-1}{2}\cdot 1^{n-2} = \frac{n+1}{2}.}$$

Partie III – Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Plus tard, on montrera ce type d'inégalités par des arguments de convexité. Ne disposant pas encore de cet outil, on fait une étude de fonctions. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = 1 - x - \mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$, donc $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. La suite $\left(\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)_{n \geqslant k}$ est croissante car tous les termes de cette somme sont positifs. Ainsi, soit elle converge vers un réel, soit elle diverge vers $+\infty$. Comme la série $\sum P(A_i)$ diverge, la première hypothèse ne convient pas. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

(b) On a $\overline{C_n} = \bigcap_{k \leqslant i \leqslant n} \overline{A_i}$. Or, les A_i, $k \leqslant i \leqslant n$ étant (mutuellement, même si ce n'est pas précisé dans l'énoncé) indépendants, il en est de même des $\overline{A_i}$, $k \leqslant i \leqslant n$. Ainsi :

$$P(\overline{C_n}) = \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}),$$

et par conséquent, $\boxed{P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}).}$

Or, d'après la question III-1, pour tout $i \in [\![k, n]\!]$,

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leqslant \mathrm{e}^{-P(A_i)}, \qquad \text{donc:} \quad \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leqslant \prod_{i=k}^{n} \mathrm{e}^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right),$$

chacun des termes du produit étant positif. Il vient donc : $\boxed{P(C_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).}$

(c) On obtient donc l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant k, \quad 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) \leqslant P(C_n) \leqslant 1.$$

Le minorant tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, puisque la quantité dans l'exponentielle tend vers $-\infty$ d'après la question III-2(a). Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $(P(C_n))_{n \geqslant k}$ admet une limite en $+\infty$, et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

(d) Soit $n \geqslant k$. Alors $C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$, donc $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$.

Ainsi, la suite $(C_n)_{n \geqslant k}$ est une suite croissante d'événements. Par conséquent, d'après la propriété de limite monotone,

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

(e) • Soit $x \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Alors il existe $i \in [\![k, +\infty[\![$ tel que $x \in A_i$. Comme $A_i \subset C_i$, on en déduit que $x \in C_i$, donc $x \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. D'où l'inclusion $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

• Soit $x \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Alors il existe $n \in [\![k, +\infty[\![$ tel que $x \in C_n$, donc $x \in A_k \cup \cdots \cup A_n$. Ainsi, il existe $i \in [\![k, n]\!]$, donc *a fortiori* $i \in [\![k, +\infty[\![$, tel que $x \in A_i$. Par conséquent, $x \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. D'où l'inclusion $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$.

Les deux inclusions amènent l'égalité :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.} \qquad \text{donc:} \quad \boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = 1.}$$

3. Soit A l'événement « obtenir au mois une fois une succession de deux Pile »
Les tirages sont mutuellement indépendants. Donc les événements A_n sont mutuellement indépendants, car ils ne dépendent chacun que des tirages $2n$ et $2n+1$, donc de tirages distincts des autres événements A_i. De plus, A_n est réalisé si et seulement si $P_{2n} \cap P_{2n+1}$ est réalisé, donc $P(A_n) = \frac{1}{4}$. Ainsi, $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite constante non nulle, donc $\sum P(A_n)$ diverge grossièrement.
Par conséquent, on peut appliquer les résultats précédents :
$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$
Or, l'événement $\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty} A_i$ est « obtenir au moins une fois une succession de deux Pile commençant à un rang pair ». Par conséquent, $\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty} A_i \subset A$, donc :
$$1 = P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad \text{puis:} \qquad \boxed{P(A) = 1}.$$

Problème 2 – Une histoire de sous

Partie I – Première machine

1. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Sachant que $X = n$, Y est le nombre de succès dans une série de n expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p. Ainsi, Y sachant $X = n$ suit une loi binomiale de paramètres (n,p) :
$$\boxed{P(Y = k \mid X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet $\{[X = n], n \in \mathbb{N}\}$, on obtient :
$$P(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{-4p} \frac{(4p)^n}{n!} = \frac{p^k(4p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-4p} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(4pq)^{n-k}}{(n-k)!}.$$
En effectuant un changement d'indice, on reconnaît une série exponentielle, d'où :
$$P(Y = k) = \frac{(4p^2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-4p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4pq)^n}{n!} = \frac{(4p^2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-4p}\mathrm{e}^{4pq},$$
et finalement :
$$\boxed{P(Y = k) = \frac{(4p^2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-4p(1-q)} = \frac{(4p^2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-4p^2}}.$$
3. On en déduit que Y suit une loi de Poisson de paramètre $4p^2$. Par conséquent, $\boxed{E(Y) = 4p^2}$ et $\boxed{V(Y) = 4p^2}$.
4. (a) Pour que le budget du Casino soit équilibré, il faut que l'espérance soit égale à la somme dépensée, à savoir 2 euros. Ainsi il faut que
$$4p^2 = 2 \qquad \text{soit:} \qquad p^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{p = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$
(b) Pour que le bénéfice du casino soit égal en moyenne à la moitié de la somme versée par le joueur, il faut que le gain moyen du joueur soit la moitié de la somme qu'il dépense, à savoir 1 euro sur un jeu. Ainsi, il faut que :
$$4p^2 = 1 \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{p = \frac{1}{2}.}$$

Partie II – Deuxième machine

1. X correspond au temps d'attente du premier succès dans une série d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p. Ainsi X suit une loi géométrique de paramètre p. On en déduit que $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$ et $\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$.

2. On procède de même que dans la partie I. On a ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, sachant $[X = n]$, Y suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k \mid X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales sur le système quasi-complet $\{[X = n], n \in \mathbb{N}^*\}$, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n) P(X = n).$$

- Si $k \neq 0$,

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} p q^{n-1} = p^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} q^{2n+k-1} = p^{k+1} q^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} (q^2)^n.$$

D'après la formule du binôme négatif, on en déduit que

$$P(Y = k) = \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1 - q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1} q^{k-1}}{(1 - q)^{k+1} (1 + q)^{k+1}}.$$

Comme $1 - q = p$, on en déduit que

$$\boxed{P(Y = k) = \frac{q^{k-1}}{(1 + q)^{k+1}}}.$$

- Si $k = 0$, on obtient :

$$P(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} p q^{n-1},$$

car $P(X = 0) = 0$, et par conséquent,

$$P(Y = 0) = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2(n-1)} = pq \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n = \frac{pq}{1 - q^2} = \frac{pq}{(1 - q)(1 + q)} = \boxed{\frac{q}{1 + q} = P(Y = 0)}.$$

En effet la somme est une somme géométrique de raison q^2 dans $]-1, 1[$.

Calculons la somme des probabilités :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = \frac{q}{1 + q} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{k-1}}{(1 + q)^{k+1}} = \frac{q}{1 + q} + \frac{1}{(1 + q)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{1 + q} \right)^k = \frac{1}{1 + q} + \frac{1}{(1 + q)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{q}{1+q}},$$

et un calcul élémentaire amène donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1.}$$

3. L'espérance existe si et seulement la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} k P(Y = k)$ converge absolument. Puisque k ne prend que des valeurs positives, cette série est à termes positifs, et il suffit d'étudier sa convergence.

On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{q^{k-1}}{(1 + q)^{k+1}} = \frac{1}{(1 + q)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{q}{1 + q} \right)^{k-1}.$$

Comme $\frac{q}{1+q}$ est élément de l'ensemble $]-1,1[$ (puisque $0 < q < 1+q$), on en déduit, d'après la formule du binôme négatif, la convergence (absolue) de la série définissant $E(X)$, d'où l'existence de cette espérance. De plus :

$$E(X) = \frac{1}{(1+q)^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2}$$

Après simplifications, on obtient $\boxed{E(X) = 1}$

Sous réserve de convergence absolue, on a, d'après le théorème de transfert :

$$E(X(X+1)) = \frac{1}{(1+q)^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}.$$

Encore une fois, la formule du binôme négatif nous assure la convergence absolue, et par conséquent, $E(X(X-1))$ existe, et

$$E(X(X+1)) = \frac{1}{(1+q)^2}\cdot\frac{2}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^3} = 2(1+q).$$

L'existence de $E(X(X-1)$ assure cette de $V(X)$ (les deux séries définissant $E(X(X-1))$ et $V(X)$ sont à termes positifs, et de termes généraux équivalents). De plus, d'après la formuel de König-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2 = 2 + 2q - 1 - 1 = \boxed{2q = V(X)}.$$

4. L'espérance de gain lors d'une partie est de 1 euro, pour 2 euros versés, donc le bénéfice du Casino est en moyenne de 1 euro sur une partie coûtant 2 euros au joueur. Ainsi, le bénéfice moyen du Casino sur cette machine est la moitié de la somme versée par le joueur. Cette espérance est indépendante de p. Le réglage de pn'influe donc pas sur le bénéfice moyen. En revanche, il influe sur la variance.

Partie III – Troisième machine

1. X_1 est le nombre de succès dans une suite de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Ainsi, X_1 suit une loi binomiale de paramètres (n,p) : $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$. Par conséquent, $\boxed{E(X_1) = np}$ et $\boxed{V(X_1) = npq}$.
2. Lors de la deuxième série de tirages, on effectue X_1 tirages, X_1 pouvant varier entre 0 et n. Ainsi, on peut obtenir entre 0 et n succès. Par conséquent, $X_2(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$. La loi de X_2 sachant que $X_1 = \ell$ est la loi d'une variable aléatoire égale au nombre de succès lors d'une série de ℓ expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc une loi binomiale de paramètre (ℓ,p). Par conséquent :

$$\forall (k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2,\quad P(X_2 = k \mid X_1 = \ell) = \begin{cases} \binom{\ell}{k} p^k q^{\ell-k} & \text{si } k \leqslant \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Ainsi, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $\{[X_1 = \ell],\ \ell \in [\![0,n]\!]\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![0,n]\!],\quad P(X_2 = k) &= \sum_{\ell=0}^{n} P(X_2 = k \mid X_1 = \ell)P(X_1 = \ell) = \sum_{\ell=k}^{n}\binom{\ell}{k}\binom{n}{\ell}p^k q^{\ell-k}p^\ell q^{n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{\ell+k}{k}\binom{n}{\ell+k}p^{\ell+2k}q^{n-k} = q^{n-k}p^{2k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(\ell+k)!n!}{\ell!k!(\ell+k)!(n-\ell-k)!}p^\ell \\ &= q^{n-k}p^{2k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(n-k)!n!}{\ell!k!(n-k)!(n-\ell-k)!}p^\ell \\ &= \binom{n}{k}q^{n-k}p^{2k}\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}p^\ell = \binom{n}{k}q^{n-k}p^{2k}(1+p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Puisque $q(1+p) = (1-p)(1+p) = 1-p^2$, on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\quad P(X_2 = k) = \binom{n}{k} p^{2k}(1-p^2)^{n-k}}, \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p^2)}.$$

Vous remarquerez qu'en lisant l'énoncé jusqu'au bout, vous étiez aidé pour cette question, puisqu'on vous fournit dans la partie 4 la réponse à cette question. Cela vous permet de diriger les calculs en conséquence, et au besoin d'admettre le résultat pour répondre aux questions suivantes. Sans aller jusqu'à la partie 4, la question suivante vous indique également que vous devez retrouver une loi classique.

3. Puisque $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p^2)$, on obtient immédiatement $\boxed{E(X_2) = np^2}$ et $\boxed{V(X_2) = np^2(1-p^2)}$.
4. Le gain du joueur est $X_1 + X_2$. Ainis l'espérance de gain est

$$\boxed{E(X_1 + X_2) = n(p+p^2) = np(1+p)}.$$

5. Pour que le bénéfice moyen du Casino soit la moitié de la somme versée, il faut que l'espérance de gain soit égale à l'autre moitié, donc :

$$np(1+p) = \frac{n}{2} \qquad \text{soit:} \qquad 2p(1+p) = 1 \qquad \text{soit:} \qquad p^2 + p - 1 = 0.$$

La résolution de cette équation du second degré donne :

$$p_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

La première valeur est impossible car négative. La seconde est bien dans l'intervalle $]0,1[$. Ainsi, il faut choisir $\boxed{p = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Partie IV – Quatrième machine

1. Soit, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p^k)$.

Par hypothèse $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Même si cela est inutile pour bien fonder la récurrence, on peut remarquer qu'on a démontré dans la partie 3 que $\mathcal{P}(2)$ est vraie aussi.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. A chaque série de lancers, on effectue un nombre d'expérience égal au nombre de succès de la série précédente, donc inférieur ou égal au nombre d'expériences de la série précédente. Ainsi, on effectue lors d'une série donnée, au plus n expériences de Bernoulli, donc on obtient au plus n succès. On peut obtenir n succès, si on a également obtenu uniquement des succès dans toutes les séries précédentes. Ainsi, $X_{k+1}(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Alors, sachant $X_k = \ell$, X_{k+1} est le nombre de succès dans une suite de ℓ expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, et suit donc une loi binomiale de paramètres (ℓ,p). Ainsi :

$$\forall (j,\ell) \in [\![0,n]\!]^2,\quad P(X_{k+1} = j \mid X_k = \ell) = \begin{cases} \binom{\ell}{j} p^j q^{\ell-k} & \text{si } j \leqslant \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit, d'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet $\{[X_k = \ell],\ \ell \in [\![0,n]\!]\}$, que :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\quad P(X_{k+1} = j) = \sum_{\ell=0}^{n} P(X_{k+1} = j \mid X_k = \ell) P(X_k = \ell) = \sum_{\ell=j}^{n} \binom{\ell}{j}\binom{n}{\ell} p^j (1-p)^{\ell-j} p^{k\ell}(1-p^k)^{n-\ell},$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![0,n]\!],\quad P(X_{k+1}=j) &= \sum_{\ell=0}^{n-j}\binom{\ell+j}{j}\binom{n}{\ell}p^{j+k(\ell+j)}(1-p)^{\ell}(1-p^k)^{n-\ell-j}\\ &= p^{(k+1)j}\sum_{\ell=0}^{n-j}\frac{(\ell+j)!n!}{\ell!j!(\ell+j)!(n-\ell-j)!}(p^k(1-p))^{\ell}(1-p^k)^{n-\ell-j}\\ &= p^{(k+1)j}\sum_{\ell=0}^{n-j}\frac{(n-j)!n!}{\ell!j!(n-j)!(n-\ell-j}(p^k(1-p))^{\ell}(1-p^k)^{n-\ell-j}\\ &= \binom{n}{j}p^{(k+1)j}\sum_{\ell=0}^{n-j}\binom{n-j}{\ell}(p^k(1-p))^{\ell}(1-p^k)^{n-\ell-j}\\ &= \binom{n}{j}p^{(k+1)j}(p^k(1-p)+1-p^k)^{n-j} = \binom{n}{j}(p^{(k+1)})^j(1-p^{k+1})^{n-j}.\end{aligned}$$

Ainsi, $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p^{k+1})$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue k séries de tirages au plus si et seulement une des k premières série amène 0 succès. A partir de cette série, toutes les séries précédentes amènent 0 succès puisqu'on ne tire plus. Ainsi, la k-ième série amène 0 succès. Donc $[X_k = 0]$. Réciproquement, si la k-ième série amène 0 succès, la partie s'arrête là, à moins qu'elle s'était déjà arrêtée avant. Ainsi, on effectue au plus k séries de tirages, donc $[Z \leqslant k]$. Par conséquent, $\boxed{[Z \leqslant k] = [X_k = 0]}$.

   Si $k = 0$, $[Z \leqslant k]$ est l'événement impossible, puisqu'on effectue au moins une série.

3. Par conséquent, pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$,

$$P(Z=k) = P([Z \leqslant k] \setminus [Z \leqslant k-1]) = P([Z \leqslant k]) - P([Z \leqslant k-1]),$$

   car $[Z \leqslant k-1] \subset [Z \leqslant k]$. Ainsi, connaissant les lois de X_k et X_{k-1}, on peut écrire :

$$\boxed{P(Z=k) = P(X_k = 0) - P(X_{k-1} = 0) = (1-p^k)^n - (1-p^{k-1})^n.}$$

   De plus $\boxed{P(Z=1) = P(X_1 = 0) = p^n}$.

4. L'énoncé n'est pas bien posé, car il vaut mieux partir des probabilités $P(Z \leqslant k)$ pour répondre à cette question. Soit A l'événement « la partie s'arrête ». L'événement A est réalisé si et seulement si il existe un rang k pour lequel $[Z \leqslant k]$ est réalisé. Ainsi :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[Z \leqslant k].$$

   Or $([Z \leqslant k]_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante pour l'inclusion. Ainsi, d'après la propriété de limite monotone,

$$P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(Z \leqslant k) = \lim_{k\to+\infty} P(X_k = 0) = \lim_{k\to+\infty}(1-p^k)^n = 1.$$

   Ainsi, $\boxed{P(A) = 1}$, donc l'événement A est réalisé presque sûrement.

5. Donc presque sûrement, la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ prend des valeurs nulles à partir d'un certain rang, et $Y = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} X_k$ est une somme finie, donc définie.

6. D'après l'énoncé, on peut écrire :

$$E(Y) = E\left(\sum_{k=1}^{+\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} E(X_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} np^k = \boxed{\frac{np}{1-p} = E(Y).}$$

7. Ainsi, le casino fait un bénéfice moyen égal à la moitié de la somme dépensée par le joueur si et seulement si

$$E(Y) = \frac{n}{2}, \qquad \text{soit:} \qquad \frac{2p}{1-p} = 1 \qquad \text{soit:} \qquad 2p = 1-p \qquad \text{soit:} \qquad \boxed{p = \frac{1}{3}.}$$