Correction du Devoir Maison n° 7
(Exercices 9 et 10 de la feuille d'analyse 4)

Exercice 9 – (Étude de la fonction Γ)

1. On rappelle que d'après le cours, Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. Alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \geqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t,$$

car la fonction intégrée est positive et $]0,1] \subset]0,+\infty[$. De plus, pour tout $t \in]0,1]$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, donc, t^{x-1} étant positif, et par propriété de croissance de l'intégrale,

$$\Gamma(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\Gamma(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\Big[\frac{t^x}{x}\Big]_{\lim_{0^+}}^1 = \frac{1}{x\mathrm{e}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\mathrm{e}} = +\infty$, donc, d'après le théorème d'existence d'une limite infinie par minoration, Γ admet une limite en 0^+, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Soit $x > 1$. De la même façon, puisque la fonction intégrée est positive, et que $[2,+\infty[\subset]0,+\infty[$, on a :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \geqslant \int_2^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \geqslant 2^{x-1}\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t,$$

car la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est croissante sur $[2,+\infty[$ (puisque $x-1>0$), donc minorée sur cet intervalle par sa valeur en 2.
Ainsi, pour tout $x > 1$,

$$\Gamma(x) \geqslant 2^{x-1}\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_2^{+\infty} = \frac{2^{x-1}}{\mathrm{e}^2}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x-1}}{\mathrm{e}^2} = +\infty$, donc, d'après le théorème de minoration, Γ admet une limite en $+\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

3. À t fixé, $x \mapsto t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^{+\infty}$) sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que composée d'une fonction affine et d'une exponentielle. Ainsi, f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque e^{-t} est une constante par rapport à x. De plus (on dérive *par rapport à x*) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_t'(x) = \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{e}^{(x-1)\ln t} = \mathrm{e}^{-t}\ln t\cdot t^{x-1}, \qquad \text{puis:} \qquad f_t''(x) = \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^2\mathrm{e}^{(x-1)\ln t} = \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^2 t^{x-1}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \min\left(\frac{x}{2},1\right)$.
   (a) Soit $\alpha_x = \min\left(\frac{x}{2},1\right)$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[\frac{x}{2},\frac{3x}{2}]$, donc sur le sous-intervalle $[x-\alpha_x, x+\alpha_x]$. Or, puisque $|h| \leqslant \alpha_x$, $x+h$ est dans cet intervalle. Donc, d'après l'inégalité de Taylor Lagrange appliquée entre x et $x+h$,

$$|f_t(x+h) - f_t(x) - hf_t'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2(t,x),$$

   où $M_2(t,x)$ est un majorant de $|f_t''|$ sur l'intervalle $[x-\alpha_x, x+\alpha_x]$ (il peut dépendre de t et x qui sont fixés, mais pas de h). Remarquez que l'inégalité de l'énoncé n'est pas définie lorsque $h=0$, nous rajoutons donc l'hypothèse $h \neq 0$. Dans ces conditions, on peut diviser par $|h|$ et on obtient :

$$\left|\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}M_2(t,x),$$

Vous aurez rectifié par vous-même la valeur absolue manquante.

Déterminons une valeur possible de $M_2(t,x)$.

- Supposons $t \geqslant 1$. Alors pour tout $y \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$,
$$|f_t''(y)| = (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{y-1} \leqslant (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^x,$$
car, puisque $\alpha_x \leqslant 1$, $y \leqslant x+1$, donc $y-1 \leqslant x$, et de plus $t \geqslant 1$.
- Supposons $t < 1$. Alors par le même raisonnement $y \geqslant x - \alpha_x \geqslant x - \frac{x}{2}$, donc $y - 1 \geqslant \frac{x}{2} - 1$, et comme $0 < t < 1$, $t^{y-1} \leqslant t^{\frac{x}{2}-1}$. Ainsi,
$$|f_t''(y)| \leqslant (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{x}{2}-1},$$

On peut donc choisir $M_2(t,x)$ comme étant égal à une de ces deux valeurs, en discutant suivant la valeur de t.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction $g : t \mapsto (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{x}{2}-1}$ est continue sur $]0,1]$. La seule impropreté de l'intégrale se trouve donc en 0. Or, en 0, on a
$$t^{-\frac{x}{4}+1}|g(t)| = t^{\frac{x}{4}}(\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t}.$$
Puisque $\frac{x}{4} > 0$, les croissances comparées ntre puissances et logarithme en 0 amènent :
$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{x}{4}+1}|g(t)| = 0, \qquad \text{donc:} \qquad |g(t)| = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{4}}}\right).$$
Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\frac{x}{4}}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1 - \frac{x}{4} < 1$, donc, les fonctions étant positives, $\displaystyle\int_0^1 |g(t)| \, \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^1 g(t) \, \mathrm{d}t$ converge, donc converge absolument.
- La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^x$ est continue sur $[1, +\infty[$. La seule impropreté de l'intégrale se situe dons en $+\infty$. Or, l'exponentielle « va l'emporter ». Plus précisément, d'après les croissances comparées,
$$(\ln t)^2 = \underset{+\infty}{o}(t) \qquad \text{donc:} \qquad (\ln t)^2 t^{\frac{x}{2}-1} = \underset{+\infty}{o}(t^{\frac{x}{2}}).$$
De plus, d'après les croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t} = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^{2+\frac{x}{2}}}\right)$, donc :
$$h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{t^{\frac{x}{2}}}{t^{2+\frac{x}{2}}}\right) \qquad \text{donc:} \qquad h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$
Ainsi, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre 2, et par positivité des fonctions, on en déduit, d'après le théorème de comparaison par o que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

(c) On déduit de la question précédente que, à x fixé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} M_2(t,x) \, \mathrm{d}t$ est convergente. Alors, par le théorème de comparaison par inégalité, pour tout $h \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$, $h \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \, \mathrm{d}t$ converge absolument. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on obtient :
$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} M_2(t,x) \, \mathrm{d}t.$$
Or, par les propriétés de convergence de l'intégrale Γ, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x+h) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x) \, \mathrm{d}t$ convergent. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \, \mathrm{d}t$ converge également, on en déduit la convergence de

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t$. Ainsi, on peut écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x+h)\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f_t(x)\ \mathrm{d}t}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right|.$$

Ainsi, on obtient, pour tout $h \in [x-\alpha_x, x+\alpha_x]$, $h \neq 0$:

$$\left|\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} - \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est convergente, et sa valeur ne dépend par de h, donc

$$\lim \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} M_2(t,x)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t'(x)$ ne dépend pas de h, on en déduit que $\dfrac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0, donc que Γ est dérivable en x, et que :

$$\Gamma'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(x+h)-\Gamma(x)}{h} = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, Γ est dériable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'expression ci-dessus donnant l'expression de Γ' en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

5. L'expression trouvée pour f_t'' montre clairement que f_t'' est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f_t' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à t fixé. Soit donc $0 < x < y$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_t'(x) \leqslant f_t'(y)$. Par la propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit, ces intégrales étant convergentes, que :

$$\int_0^{+\infty} f_t'(x)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f_t'(y)\ \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \Gamma'(x) \leqslant \Gamma'(y).$$

Ainsi, Γ' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 – Pour tout réels x et y, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

1. (a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$. Donc il peut y avoir deux impropretés en 0 et en 1.
   - Étude en 0. On a, au voisinage de 0 :

   $$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}.$$

   Les fonctions étant positives, l'intégrale définissant $B(x,y)$ et $\int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ sont de même nature en la borne 0. Or cette dernière intégrale est convergente si et seulement si $1-x < 1$, donc si $x > 0$, en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $1-x$ en 0. Ainsi, l'intégrale définissant $B(x,y)$ converge en la borne 0 si et seulement si $x > 0$.
   - Étude en 1. De même :

   $$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1},$$

   et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$ converge (pour sa seule borne impropre 1) si et seulement si $y > 0$ (il s'agit encore une fois d'une intégrale de Riemann, en 1 cette fois). Donc l'intégrale définissant $B(x,y)$ converge en la borne 1 si et seulement si $y > 0$.

Ainsi, le domaine de définition de B est $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*)^2$. Effectuons le changement de variables $u = 1-t$ dans $B(x,y)$, donc $t = 1-u = \varphi(u)$, donc $\ dt = -\ du$. La fonction φ est bijective de $]0,1[$ dans $]0,1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante. Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dtet - \int_0^1 (1-u)^{x-1}(1-1+u)^{y-1}(-\ du)$$

sont de même nature, donc convergentes, et :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 (1-u)^{x-1}(1-1+u)^{y-1}(-\ \mathrm{d}u) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\ \mathrm{d}u = B(y,x).$$

(c) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a :

$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t.$$

Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale, en posant les fonctions u et v définies par :

$$\forall t \in]0,1[,\quad u(t) = t^x \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\frac{(1-t)^y}{y}.$$

Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, et

$$\forall t \in]0,1[,\quad u'(t) = xt^{x-1} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = (1-t)^y.$$

De plus, puisque $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 1^-} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, ces limites existant dans $\mathbb{R}$, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que les intégrales $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature, donc convergentes, et que

$$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t = \lim_{t\to 1^-} u(t)v(t) - \lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) - \int_0^1 -xt^{x-1}\cdot\frac{(1-t)^y}{y}\ \mathrm{d}t = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

Donc $yB(x+1,y) = xB(x,y+1)$.
Or, on a :

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t,$$

ces intégrales étant convergentes. Ainsi :

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y).$$

On obtient donc la relation suivante :

$$yB(x+1,y) = xB(x,y) - xB(x+1,y) \qquad \text{donc:} \qquad B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

(d) On commence par $n = 0$. On obtient :

$$B(1,y) = \int_0^1 t^0(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^y}{y}\right]_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Alors, par itération de la formule trouvée dans la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B(n+1,y) = \frac{n}{n+y}\cdot\frac{n-1}{n-1-y}\cdots\frac{1}{1+y}B(1,y) = \frac{n!}{y\prod_{k=1}^{n}(k+y)} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(k+y)}.$$

Ce produit ne se simplifie pas davantage.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La dérivée seconde de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est $f'' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$. Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc f est convexe. Ainsi, la courbe de f est au-dessous de ses tangentes, notamment de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-t} \geqslant f'(0)t + f(0) = -t + 1.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, n]$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$. Or puisque $t \in [0, n]$, ces quantités sont positives, donc en élevant à la puissance n, par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

(b) Question délicate ! Je n'ai personnellement pas trouvé de méthode pour $t \in [0, \sqrt{n}]$ qui ne marche pas pour $t \in [\sqrt{n}, n]$. J'expose donc une méthode ne nécessitant pas de discussion. J'ai moi-même mis un peu de temps avant de trouver (peut-être n'ai-je pas vu un point évident pour le cas $t \in [\sqrt{0}, \sqrt{n}]$?) Tout d'abord, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $(1-x)^n \geqslant 1 - nx$. Encore une fois, il s'agit d'une inégalité de convexité. En posant $h : x \mapsto (1-x)^n$, on obtient, si $n \geqslant 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, $h'(x) = -n(1-x)^{n-1}$ et $h''(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} \geqslant 0$. Si $n = 1$, $h'' = 0 \geqslant 0$. Ainsi, dans tous les cas, h est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (1-x)^n \geqslant f'(0)x + f(0) = -nx + 1.$$

On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$, puisque $\frac{t}{n} \in [0, 1]$:

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-t} = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

d'après la question 2a, avec $x = \frac{t}{n}$.

(c) Soit $x > 0$; On en déduit que pour tout $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

donc, puisque $t^{x-1} \geqslant 0$,

$$\left(1 - n\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

donc :

$$\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-t}t^{x+1} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et n, on obtient, par positivité de l'intégrale (les intégrales étant convergentes en 0 d'après les propriétés de convergence des intégrales Γ)

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x+2).$$

Ainsi, d'après les règles usuelles sur les limites, le majorant et le minorant convergent tous deux vers $\Gamma(x)$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, le terme intermédiaire admet une limite, et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

(d) Effectuons le changement de variables $u = \frac{t}{n}$, donc $t = nu = \varphi(u)$. La fonction φ est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,n]$, strictement croissante, et de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, les intégrales étant convergentes, on a :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\ \mathrm{d}u = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\ \mathrm{d}u = n^x B(n+1,x).$$

On déduit alors de la question 1(d) que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \cdot \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(k+x)} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

3. (a) D'après ce qui précède,

$$\lim_{n\to+\infty} n^y B(n+1,y) = \Gamma(y) \neq 0, \qquad \text{donc:} \qquad n^y B(n+1,y) \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(y), \qquad \text{donc:} \qquad B(n+1,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}.$$

(b) Comme $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto t^x$ est décroissante. Donc, à y fixé, par propriété de croissance de l'intégrale, la fonction B est décroissante en sa première variable. Ainsi, pour tout $x > 1$,

$$B(\lfloor x \rfloor + 1, y) \leqslant B(x,y) \leqslant B(\lfloor x \rfloor, y)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Or, $x \underset{+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$ et $x \underset{+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor + 1$, donc y étant fixe,

$$\lfloor x \rfloor^y \equiv x^y \equiv (\lfloor x \rfloor + 1)^y.$$

Ainsi,

$$B(\lfloor x \rfloor, y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y} \underset{+\infty}{\sim} B(\lfloor x \rfloor + 1, y).$$

Or, l'encadrement précédent amène, pour tout $x > 1$,

$$\frac{B(\lfloor x \rfloor + 1, y)}{\Gamma(y)/x^y} \leqslant \frac{B(x,y)}{\Gamma(y)/x^y} \leqslant \frac{B(\lfloor x \rfloor, y)}{\Gamma(y)/x^y}.$$

D'après ce qui précède, les termes encadrant admettent 1 pour limite, donc aussi le terme central. Donc

$$B(x,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}.$$

(c) Désolé pour la référence incorrecte. L'énoncé voulait renvoyer à la question 2. Par itération de la question 1(c), on obtient dans un premier temps que

$$B(x+n,y) = \frac{x+n-1}{x+y+n-1} B(x+n-1,y) = \cdots = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+y+k)} B(x,y)$$

Ainsi, d'après la question 2,

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{x+y} n!}{n^x n!} \cdot \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+y+k)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^y B(x+n,y)}{B(x,y)} \cdot \frac{x+n}{x+y+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^y B(x+n,y)}{B(x,y)}.$$

Or, $B(x+n,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$, donc, en remplaçant dans l'équivalent précédent :

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{B(x,y)}.$$

Comme ces expressions ne dépendent plus de n, on en déduit l'égalité plaçant dans l'équivalent précédent :

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(y)}{B(x,y)} \qquad \text{soit:} \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$