**Correction du Devoir surveillé n° 2 – 4 heures**

**Exercice 1 – (EDHEC 2003)**

1. Commençons par une remarque : la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\lambda$ un réel. Alors

$$\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{3}(a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{3} b_{i,i} = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B).$$

Montrons, à l'aide de ce résultat, que $\langle \cdot, \rangle$ définit un produit scalaire.

- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\langle A, B + \lambda C\rangle = \operatorname{tr}(\,{}^tA(B + \lambda C)) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB + \lambda\,{}^tAC) = \operatorname{tr}(\,{}^tAB) + \lambda \operatorname{tr}(\,{}^tAC),$$

par linéarité de la trace. Ainsi,

$$\langle A, B + \lambda C\rangle = \langle A, B\rangle + \lambda \langle A, C\rangle\,,$$

d'où la linéarité par rapport à la seconde variable.

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$. Alors

$$\langle B, A\rangle = \operatorname{tr}(\,{}^tBA) = \operatorname{tr}(\,{}^t(\,{}^tBA)),$$

car les éléments diagonaux d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, donc les traces d'une matrice et de sa transposée sont égales Ainsi, puisque ${}^t(\,{}^tBA) = {}^tAB$, on obtient $\langle B, A\rangle = \langle A, B\rangle$.

- $\langle \cdot, \cdot\rangle$ étant symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable, elle l'est aussi par rapport à la première variable. il s'agit donc d'une forme bilinéaire symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$, ${}^tA = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et ${}^tAA = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Alors

$$\forall i \in [\![1, 3]\!], \quad c_{i,i} = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}b_{j,i} = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}a_{i,j}$$

Ainsi,

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{i,j}^2.$$

On en déduit que $\langle A, A\rangle \geqslant 0$, en tant que somme de termes positifs. Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est positive.

- De plus, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Ainsi, $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0$, c'est-à-dire $a_{i,j} = 0$, donc si et seulement si $A = 0$. Ainsi, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est définie.

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ étant une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2. On a :
   - ${}^tIJ = J$, donc $\langle I, J\rangle = 0 + 0 + 0 = 0$,
   - ${}^tIJ^2 = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\langle I, J\rangle = 0$
   - ${}^tJJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\langle J, J^2\rangle = 0$.

Ainsi, la famille $(I, J, J^2)$ est une famille orthogonale.

3. (a) Puisque $(I, J, J^2)$ est déjà orthogonale, il suffit de diviser les $J^i$ par leur norme :
   - $\|I\|^2 = \mathrm{tr}(\ {}^tII) = 3$
   - $\|J\|^2 = \mathrm{tr}(\ {}^tJJ) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$
   - $\|J^2\|^2 = \mathrm{tr}(\ {}^t(J^2)J) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

   Ainsi, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}I, \frac{1}{\sqrt{2}}J, J^2\right)$ est un famille orthonormale.

   (b) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$.
   - Soit $i = 0$, $K_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}I$. Ainsi

   $$\langle K_0, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle I, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{tr}(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}.$$

   - Soit $i = 1$, $K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}J$. Ainsi,

   $$\langle K_1, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle J, A \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{tr}(\ {}^tJA).$$

   Or,

   $${}^tJA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $\langle K_1, A \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,2} + a_{2,3})$.
   - De même,

   $${}^t(J^2)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{pmatrix},$$

   donc $\langle K_2, A \rangle = \left\langle J^2, A \right\rangle = a_{1,3}$.

   (c) $(K_0, K_1, K_2)$ étant une base orthonormale,

   $$\begin{aligned} p(A) &= \langle A, K_0 \rangle K_0 + \langle A, K_1 \rangle K_1 + \langle A, K_2 \rangle K_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})K_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,2} + a_{2,3})K_1 + a_{1,3}K_2. \end{aligned}$$

   (d) $p(A)$ est nul si et seulement si

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} & = & 0 \\ a_{1,2} + a_{2,3} & = & 0 \\ a_{1,3} & = & 0 \end{array} \right.$$

   Ainsi, le choix entièrement libre de $a_{i,j}$, $i \in [\![2, 3]\!]$, $j \in [\![1, 3]\!]$ détermine les valeurs restants $a_{1,j}$, $j \in [\![1, 3]\!]$. En prenant une base pour l'ensemble des paramètres (de dimension 6), on obtient, les 6 matrices suivantes, formant une base de $\mathrm{Ker}\, p$ :

   $$E_{2,1}, E_{2,2} - E_{1,1}, E_{2,3} - E_{1,2}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3} - E_{1,1},$$

   où pour tout $(i, j)$, $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient en position $(i, j)$, égal à 1. Ces vecteurs forment donc une base de $\mathrm{Ker}\, p$.

   Remarquez la cohérence du résultat : $p$ étant la projection sur un espace de dimension 3, dans un espace total de dimension 9, $\mathrm{Ker}(p)$ est de dimension 6, ce qu'on retrouve bien par la description de cette base, comprenant 6 vecteurs.

**Exercice 2 – (d'après EDHEC 2002)**

1. **Étude des symétries de $\mathbb{R}^n$**

   (a) i. Soit $x \in F_1$, alors la décomposition de $x$ dans la somme directe $F_1 \oplus F_2$ est $x = x + 0$, donc, par définition, $s(x) - x - 0 = x$.

   ii. • Soit $x \in F_1$, d'après ce qui précède, $s(x) = x$, donc $(s - \text{id})(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker}(s - \text{id})$ Ainsi, $F_1 \subset \text{Ker}(f - \text{id})$.
   • Soit $x \in \text{Ker}(s - \text{id})$. Il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $s(x) = x_1 - x_2$. Mais par ailleurs, $s(x) = x = x_1 + x_2$ car $x \in \ker(s - \text{id})$. Ainsi, $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$, donc $x_2 = 0$. Par conséquent, $x = x_1$, donc $x \in F_1$.
   Ainsi, $\text{Ker}(s - \text{id}) \subset F_1$.

   Les deux inclusions amènent l'égalité $\text{Ker}(s - \text{id}) = F_1$.

   (b) i. Soit $x \in F_2$. La décomposition de $x$ dans $F_1 \oplus F_2$ est donc $x = 0 + x$, donc $s(x) = 0 - x = -x$.

   ii. • Soit $x \in \text{Ker}(s + \text{id})$. Ainsi, $s(x) = -x$. Soit $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. On a donc :
   $$s(x) = x_1 - x_2 \qquad \text{et} \qquad s(x) = -x = -x_1 - x_2.$$
   Par conséquent, $x_1 = 0$, donc $x \in F_2$. Ainsi, $\text{Ker}(s + \text{id}) \subset F_2$.
   • Soit $x \in F_2$. Alors, d'après la question précédente, $s(x) - -x$, donc $x \in \text{Ker}(s + \text{id})$. Ainsi, $F_2 \subset \text{Ker}(s + \text{id})$.

   Les deux inclusions amènent l'égalité $\text{Ker}(s + \text{id}) = F_2$.

   (c) Puisque $F_1 \oplus F_2 = E$, on a donc $\text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}) = E$, c'est-à-dire $E_1 \oplus E_{-1} = E$. La somme des espaces propres étant directe, il ne peut donc pas y avoir d'avantage de valeurs propres que 1 et $-1$ (qui ne sont pas forcément toutes les deux valeurs propres : on n'a pas affirmé que $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq 0$). Ainsi, 1 et $-1$ sont les seules valeurs propres possibles, et $E_1 \oplus E_{-1} = E$, donc $s$ est diagonalisable.

   Soit $\mathcal{B}$ une base constituée d'une base de $\text{Ker}(s - \text{id})$ (donc des vecteurs propres associés à 1) et d'une base de $\text{Ker}(s + \text{id})$ (donc des vecteurs propres associés à $-1$). Alors la matrice de $s$ dans la base $\mathcal{B}$ est
   $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix},$$
   le nombre de 1 sur la diagonale étant égal à la dimension de $\text{Ker}(s - \text{id})$.

   (d) Soit $M$ la matrice obtenue dans la question précédente, et soit $s$ l'endomorphisme associée à cette matrice dans une base $\mathcal{B} = (b_1, \ddots, b_n)$. On note $p$ le nombre de 1 sur la diagonale quelconque. On pose :
   • $F_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}) = \text{Vect}(b_1, \dots, b_P)$
   • $F_2 = \text{Ker}(s + \text{id}) = \text{Vect}(b_{p+1}, \dots, b_n)$.
   On a donc $F_1 \oplus F_2 = E$.

   Soit $x \in E$, et soit $x = x_1 + x_2$ sa décomposition dans la somme directe $F_1 \oplus F_2$. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
   $$x_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Or, l'expression de la matrice de $s$ dit que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $s(b_i) = b_i$ et pour tout $i \in [\![p+1,n]\!]$, $s(b_i) = -b_i$. Ainsi

$$s(x_1 + x_2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i s(b_i) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i s(b_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i b_i = x_1 - x_2.$$

Donc $s$ est la symétrie par rapport à $F_1$ parallèlement à $F_2$.

(e) Soit $s$ une symétrie. Alors il existe une base dans laquelle la matrice $M$ de $s$ est de la forme décrite ci-dessus. Cette matrice vérifie $M^2 = I_n$, donc $s^2 = \mathrm{Id}$.

Réciproquement, si $s^2 = \mathrm{Id}$, alors $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $s$, donc les seules valeurs propres possibles de $s$ sont 1 et $-1$. De plus, si $E_1$ et $E_{-1}$ sont les sous-espaces propres correspondant (éventuellement nuls si 1 ou $-1$ n'est pas valeur propre), on a $E_1 \oplus E_{-1} = E$. En effet :

- la somme directe provient des résultats généraux sur les espaces propres si 1 et $-1$ sont tous deux valeurs propres, et est évident si l'une ou plusieurs des deux valeurs n'est pas valeur propre (car $\{0\}$ est en somme directe avec tout autre espace).
- Pour tout $x \in E$, $x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$.
  Or, $s(x + s(x)) = s(x) - s^2(x) = s(x) - x$, donc $x + s(x) \in E_{-1}$. De même $x - s(x) \in E_1$.
  Ainsi, $E \subset E_1 + E_{-1}$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a $E_1 + E_{-1} = E$.

L'endomorphisme $s$ est donc diagonalisable. Dans une base de diagonalisation qui est constituée tout d'abord de vecteurs propres associés à 1 puis de vecteurs propres associés à $-1$, la matrice de $s$ est de la forme décrite en (c). D'après la question (d), on en déduit que $s$ est une symétrie.

2. **Symétries orthogonales**

(a) On a, pour tout $x$ de $E$ dont la décomposition sur la somme direct $F \oplus F^{\perp} = E$ est $x = x_1 + x_2$,

$$p(x) = x_1 \qquad \text{et} \qquad s(x) = x_1 - x_2 = 2x_1 - (x_1 + x_2) = 2p(x) - x.$$

Par conséquent, $s = 2p - \mathrm{Id}$.

(b) Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base orthonormale de $F$, et $x \in E$. D'après le cours, l'expression de $p(x)$ est

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle \, u_i.$$

Ainsi,

$$s(x) = \left( 2 \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle \, u_i \right) - x.$$

(c) Dans cette question, on suppose que $n = 3$, et que $F$ est la plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

i. Une base de $F$ est $(b_1, b_2) = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $(u_1, u_2)$ l'orthonormalisée de Schmidt de cette base.

- $\|b_1\|^2 = 5$, donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Soit $v_2 = b_2 - \langle b_2, u_1 \rangle \, u_1$. On a :

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On a $\|v_2\|^2 = \frac{1}{25} \cdot 70$. Donc

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La famille $(u_1, u_2)$ est donc une base orthonormale de $F$.

ii. Il s'agit de calculer $s(e_1)$, $s(e_2)$ et $s(e_3)$ où $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

- $s(e_1) = \frac{2}{5}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{35}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$
- $s(e_2) = \frac{2}{5}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{35}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$
- $s(e_3) = \frac{2}{5}\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{35}\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-3\\6\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}$

Ainsi, $N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 6\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

En passant, remarquez que la matrice obtenue est symétrique, ce qui est normal : une symétrie est un endomorphisme symétrique (voir cours). C'est une façon de vérifier vos calculs.

(d) On fait de même. Commençons par orthonomaliser la base $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (b_1, b_2, b_3)$ de $F$ par le procédé de Schmidt. Cette famille est bien libre puisque échelonnée. Soit $(u_1, u_2, u_3)$ la b.o.n. de $F$ obtenue de $(b_1, b_2, b_3)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On a alors :

- $\|b_1\|^2 = 5$, donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.
- Soit $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\0\end{pmatrix}$.

  On a $\|5v_2\|^2 = 30$, donc $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\\0\end{pmatrix}$.
- Soit $v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{30}\left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-1\\2\\5\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

  On a $\|2v_3\|^2 = 10$, donc $u_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

On obtient alors, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ :

$$s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 13x44y - 2z + 6t \\ 4x + 7y + 4z - 12t \\ -2x + 4y + 13z + 6t \\ 6x - 12y + 6z - 3t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de $s$ relativement à la base canonique est

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & -12 \\ -2 & 4 & 13 & 6 \\ 6 & -12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

3. **Programmation**

   Corrigé ultérieurement.

**Problème – (EML 2002)**

**Partie I – Étude d'un exemple**

1. • Soit $(P, Q, R) \in E^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

   $$\varphi(\lambda P+Q, R) = (\lambda P(0)+Q(0))R(0)+(\lambda P(1)+Q(1))R(1)+(\lambda P(-1)+Q(-1))R(-1) = \lambda\varphi(P, R)+\varphi(Q, R).$$

   Ainsi $\varphi$ est linéaire par rapport à la seconde variable.
   - Le produit dans $\mathbb{R}$ étant commutatif, $\varphi$ est évidemment symétrique.
   - Ainsi, la linéarité par rapport à la première variable et la symétrie amènent la bilinéarité de $\varphi$.
   - Soit $P \in E$. Alors
   $$\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2 \geqslant 0.$$
   Donc $\varphi$ est positive.
   - De plus, une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si chaque terme est nul, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. Puisque $P$ est un polynôme de degré 2 et possède donc au plus 2 racines, sauf s'il est nul, cette condition est réalisée si et seulement si $P$ est le polynôme nul. Ainsi $\varphi$ est définie.

   On en déduit que $\varphi$ est un produit scalaire.

2. (a) Soit $P \in E$. Il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Alors :

   $$P'(X) = 2aX + b \qquad \text{donc:} \qquad P'(0) = b \qquad \text{et} \qquad P(1) = a + b + c \qquad \text{et} \qquad P(-1) = a - b + c.$$

   On obtient donc

   $$2P'(0) - P(1) + P(-1) = 2b - (a + b + c) + (a - b + c) = 0.$$

(b) Soit $P \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\langle u(P), P\rangle &= u(P)(0)P(0) + u(P)(1)P(1) + u(P)(-1)P(-1)\\ &= (2P'(0) - P(1) - P(-1))P(1) + (2P'(0) + P(1) + P(-1))P(-1)\\ &= 2P'(0)(P(1) + P(-1)) - P(1)^2 + P(-1)^2.\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $2P'(0) = P(1) - P(-1)$, donc

$$\langle u(P), P\rangle = (P(1) - P(-1))(P(1) + P(-1)) - P(1)^2 + P(-1)^2 = 0.$$

Ainsi, $u$ est antisymétrique.

3. (a) On a $P_1' = X + \frac{1}{2}$, d'où $u(P_1) = X^2 - X$.
Ainsi, $(u(P_1))' = 2X - 1$, et donc $u(u(P_1)) = -2X^2 - 2X = -4P_1$.
Ainsi, $P_1$ est valeur propre de $u$, associé à la valeur propre $-4$.
De plus, on a $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X)$. Ainsi :
   - $\langle P_1, P_2\rangle = \frac{1}{4}\left\langle X^2 + X, X^2 - X\right\rangle = \frac{1}{4}\left(0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2\right) = 0$;
   - $\|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1\rangle = \frac{1}{4}\left\langle X^2 + X, X^2 + X\right\rangle = \frac{1}{4}\left(0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0\right) = 1$
   - $\|P_2\|^2 = \langle P_2, P_2\rangle = \frac{1}{4}\left\langle X^2 - X, X^2 - X\right\rangle = \frac{1}{4}\left(0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2\right) = 1$

   Ainsi, $(P_1, P_2)$ est une famille orthonormale.

   (b) • Soit $P \in \operatorname{Ker} u$. Alors $2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X$ est le polynôme nul. Ainsi, $P'(0) = 0$, donc $P$ est de la forme $P = aX^2 + c$. De plus $P(1) + P(-1) = 0$, donc $2a + 2c = 0$, donc $a = -c$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Vect}(X^2 - 1)$.
   - Réciproquement, soit $P = a(X^2 - 1)$. Alors $P' = 2aX$, donc $P'(0) = 0$. De plus, $P(1) = P(-1) = 0$, donc $u(P) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Vect}(X^2 - 1) \subset \operatorname{Ker}(u)$.

   De ces deux inclusions, on déduit l'égalité $\operatorname{Ker}(u) = X^2 - X$.

   (c) **Analyse.**
Si une telle base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ existe, alors, d'après la matrice de $u$ relativement à cette base, on a :

$$u(b_1) = ab_2, \qquad u(b_2) = -ab_1, \qquad u(b_3) = 0.$$

Ainsi :

$$b_3 \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(X^2 - 1).$$

De plus, $b_3$ doit être de norme 1, et $\|X^2 - 1\|^2 = (-1)^2 = 1$. Ainsi, $b_3 = X^2 - 1$.
Par ailleurs, $u(u(b_1)) = a^2 b_1$, donc $b_1$ doit être un vecteur propre de $u^2$.
**Synthèse.**
Soit $b_1 = P_1$, $b_2 = P_2$, et $b_3 = X^2 - 1$. Alors :
   - $u(b_1) = u(P_1) = 2P_2$, par définition de $P_2$,
   - $u(b_2) = u(P_2) = u\left(\frac{1}{2}u(P_1)\right) = \frac{1}{2}\left(u^2(P_1)\right) = \frac{1}{2}(-4P_1) = -2P_1 = -2b_1$,
   - $u(b_3) = 0$, car $b_3 \in \operatorname{Ker} u$.

   De plus :
   - $(b_1, b_2) = (P_1, P_2)$ est une famille orthonormale,
   - $b_3$ est de norme 1,
   - $\langle b_3, b_1\rangle = \frac{1}{2}\left\langle X^2 - 1, X^2 + X\right\rangle = 0$,
   - $\langle b_3, b_2\rangle = \frac{1}{2}\left\langle X^2 - 1, X^2 - X\right\rangle = 0$,

   donc $(b_1, b_2, b_3)$ est une famille orthonormale. En particulier, c'est une famille libre. Comme elle est de cardinal 3 et que $E = \mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, c'est une base orthonormale de E. D'après la description donnée des images des éléments de cette base par $u$, la matrice de $u$ relativement à cette base est :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

**Partie II – Caractérisation des endomorphismes antisymétriques**

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Alors :

$$\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle .$$

   Supposons que $u$ est antisymétrique. Alors $\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle u(y), y\rangle = 0$. Ainsi

$$\langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle = 0.$$

   Par conséquent, si $u$ est un endomorphisme antisyémtrique, alors pour tout $x$ et tout $y$ de $E$, on a $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

   Réciproquement, supposons cette condition vérifiée. Alors, soit $x$ dans $E$, et posons $y = x$ dans l'égalité. On obtient :

$$\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle ,$$

   par conséquent, $\langle u(x), x\rangle = 0$, donc $u$ est antisymétrique.

2. (a) C'est une propriété valable pour tout endomorphisme dont on recherche la matrice relativement à une b.o.n. Vu la question, on attend de vous la démonstration : il s'agit d'une pure question de cours.
   Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors la $j$-ième colonne est donnée par les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $u(B_j)$. Or, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on a

$$u(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_j)\rangle\, e_i,$$

   donc la $j$ième colonne de la matrice $M$ est $\begin{pmatrix} \langle e_1, u(e_j)\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, u(e_j)\rangle \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j)\rangle .$$

   (b) Soit $u$ un endomorphisme antisymétrique. Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$m_{j,i} = \langle e_j, u(e_i)\rangle = -\langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_i, u(e_j)\rangle = -m_{i,j}.$$

   Ainsi, la matrice $M$ est antisymétrique ( *i.e.* vérifie ${}^tM = -M$).
   Réciproquement, supposons que $M$ est antisymétrique. Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $-\langle e_i, u(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle$ .
   Soit alors $(x, y) \in E^2$, et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$ les décompositions de $x$ et $y$ sur la base $\mathcal{B}$. Alors, par linéarité de $u$ et bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\langle u(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle u(e_i), e_j\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle e_i, u(e_j)\rangle = -\langle x, u(y)\rangle .$$

   Par conséquent, d'après II-1, l'endomorphisme $u$ est antisymétrique.

**Partie III – Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques**

1. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. Soit $x$ un vecteur propre associé à $\lambda$. On a alors

$$0 = \langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle = \lambda \|x\|^2.$$

   Or, $x$ étant un vecteur propre $x \neq 0$, donc $\|x\| \neq 0$. Ainsi, $\lambda = 0$.

2. • Soit $x \in \operatorname{Im} u$ et $y \in \operatorname{Ker} u$. Alors il existe $z$ tel que $x = u(z)$. On a donc :

$$\langle x, y\rangle = \langle u(z), y\rangle = -\langle z, u(y)\rangle = -\langle z, 0\rangle = 0,$$

puisque $y \in \operatorname{Ker} u\cdot$ Ainsi, $x \perp y$. On en déduit que $\operatorname{Im} u \perp \operatorname{Ker} u$.

• Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.
Or, puisque $E$ est un espace euclidien (donc de dimension finie), $(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans $E$ (de dimension $n$), donc de dimension $n - \operatorname{rg} u$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u$ et $(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ sont de même dimension finie. Comme on a une inclusion, on en déduit l'égalité :

$$\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}.$$

En particulier, $\operatorname{Ker} u$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Im} u$ dans $E$, donc est un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans $E$.

• Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0$, donc $u^2(x) = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2)$.
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Alors $u^2(x) = 0$, donc $u(u(x)) = 0$. En en déduit que $u(x) \in \operatorname{Ker}(u)$. Mais de manière évidente, $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$. Ainsi

$$u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\},$$

puisque $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires. Donc $u(x) = 0$, et $x \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$.
Les deux inclusions amènent l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

3. Il fallait bien sûr prouver que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\left\langle u^2(x), y\right\rangle = \left\langle x, u^2(y)\right\rangle$, vous aurez rectifié tout seul.
Soit $(x, t) \in E^2$. On a :

$$\left\langle u^2(x), y\right\rangle = \langle u(u(x)), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u(u(y))\rangle,$$

en appliquant 2 fois la propriété d'antisymétrie. Ainsi, $u^2$ est bien un endomorphisme symétrique.
Soit $\lambda$ une valeur propre de $u^2$ et $x$ un vecteur propre associé. Alors

$$\left\langle u^2(x), x\right\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

De plus,

$$\left\langle u^2(x), x\right\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2.$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit que $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 0$.

4. (a) Si ce n'est pas le cas, $u^2$ posséderait soit zéro valeur propre et ne serait pas diagonalisable, soit une unique valeur propre, et ne serit pas diagonalisable non plus, puisque ce n'est pas une homothétie de rapport 0 ( *i.e.* l'endomorphisme nul). Or, $u$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme symétrique, d'où une contradiction. Ainsi, $u^2$ possède au moins une valeur propre non nulle.

(b) Notons $\lambda$ la valeur propre non nulle à laquelle est associé $x$.
Si $x$ et $u(x)$ étaient liés, comme $x \neq 0$, il existerait $\mu$ tel que $u(x) = \mu x$. De plus, $\lambda x = u^2(x) u(u(x))$. Comme $\lambda \neq 0$, on a $u(x) \neq 0$. Par conséquent, $\mu \neq 0$. Ainsi, $\mu$ serait une valeur propre non nulle de $u$, ce qui contredit que la seule valeur propre possible de $u$ est 0.
Ainsi, la famille $(x, u(x))$ est libre. Donc $P$ est de dimension 2, et est donc un plan vectoriel.
De plus, soit $y \in F$, il existe $a$ et $b$ des scalaires tels que $y = ax + bu(x)$. On a alors

$$u(y) = au(x) + bu^2(x) = au(x) + \lambda bx \in F.$$

Ainsi, $F$ est stable par $u$.

(c) Soit $y \in F^{\perp}$. On a alors :

$$\langle u(y), x\rangle = -\langle y, u(x)\rangle = 0,$$

puisque $y \in F^{\perp}$ et $u(x) \in F$. De même :

$$\langle u(y), u(x)\rangle = -\left\langle y, u^2(x)\right\rangle = -\langle y, \lambda x\rangle = 0,$$

Ainsi, $u(y)$ est orthogonal à $x$ et $u(x)$, donc à $\mathrm{Vect}(x, u(x)) = F$. Donc $F^{\perp}$ est stable par $u$.

(d) Soit $(x, y) \in F^{\perp}$. On a $u(x) \in F^{\perp}$, et

$$\langle u_1(x), y\rangle_1 = \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle\,,$$

par antisymétrie de $u$, et comme $x$, $y$ et $u(y)$ sont dans $F^{\perp}$,

$$\langle u_1(x), y\rangle_1 = -\langle x, u_1(y)\rangle_1\,.$$

Donc $u_1$ est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$. De plus :

- $\mathrm{Im}\, u_1 \subset F^{\perp}$, et $F^{\perp}$ et $F$ sont supplémentaires. Donc la somme $F + \mathrm{Im}\, u_1$ est directe.
- On a évidemment $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Im}(u)$, et $x \in \mathrm{Im}(u)$ (puisque $x = \frac{1}{\lambda}u^2(x)$, $\lambda$ étant non nul), et $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc $F \subset \mathrm{Im}(u)$. Par conséquent, $F + \mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Im}\, u$.
- Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\, u$. Il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Comme $F$ et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans $E$, il existe $z_1 \in F$ et $z_2 \in F^{\perp}$ tels que $z = z_1 + z_2$. Alors $y = u(z_1) + u(z_2) = u(z_1) + u_1(z_2)$. Comme de plus, $F$ est stable par $u$, on a $u(z_1) \in F$, et $u_1(z_2) \in \mathrm{Im}\, u_1$. Ainsi, $y \in F + \mathrm{Im}(u_1)$.
  On obtient donc l'inclusion $\mathrm{Im}\, u \subset F + \mathrm{Im}(u_1)$.

Le deux inclusions et la somme directe amènent :

$$\mathrm{Im}\, u = F \oplus \mathrm{Im}\, u_1.$$

5. Il fallait lire : « le rang d'un endomorphisme antisymétrique !... »

   Soit, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: Pour tout espace euclidien de dimension $n$, tout endomorphisme antisymétrique de $E$ est de rang pair..

   Soit $n = 0$, alors tout endomorphisme de $E$ est de rang 0, donc pair ! D'où $\mathcal{P}(1)$.

   Soit $n > 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors soit $u$ un endomorphisme antisymétrique de $E$. Si $u$ est nul, alors $\mathrm{rg}(u) = 0$, donc $u$ est de rang pair. Si $u$ est non nul, alors on peut considérer le plan vectoriel $F$ des questions précédentes, et la restriction $u_1$ de $u$ sur $F^{\perp}$ (remarquez que pour des raisons de dimension, on ne peut pas être dans ce cas si $n = 1$...). L'égalité

$$\mathrm{Im}\, u = F \oplus \mathrm{Im}\, u_1$$

   amène alors : $\mathrm{rg}\, u = \dim F + \mathrm{rg}\, u_1 = 2 + \mathrm{rg}\, u_1$.

   Or, $\dim F^{\perp} < \dim E$, car $F \neq \{0\}$. Donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_1$, qui est de rang pair. Ainsi, $\mathrm{rg}(u)$ est pair lui aussi. D'où $\mathcal{P}(n)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(0), \ldots, \mathcal{P}(n-1)$ entraînent $\mathcal{P}(n)$. D'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

## Partie IV – Application

1. La matrice de $u$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est antisymétrique, donc $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$.

De plus, soit $F_1$ la colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_1$. On a $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$A^2F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -9F_1.$$

Ainsi, $F_1$ est vecteur propre de $u^2$, associé à la valeur propre $-9$, strictement négative. On peut appliquer la méthode précédente.

2. D'après les calculs précédents, $[u(f_1)]_{\mathcal{B}} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, $u$ étant antisymétrique, $\langle u(f_1), f_1 \rangle = 0$, donc la famille $(f_1, u(f_1))$ est orthogonale. Comme elle ne contient pas le vecteur nul, elle est libre, et est donc une base orthogonale de $F$. Il suffit de la normaliser :

$$\|f_1\|^2 = 3 \qquad \text{et} \qquad \|u(f_1)\|^2 = 27.$$

Par conséquent, la famille $(c_1, c_2)$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $\left( \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale de $F$.

Soit $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $w$ de $E$. Le vecteur $w$ est dans $F^\perp$ si et seulement si $\left\langle W, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ et $\left\langle W, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$ donc si et seulement si $x + y - z = 0$ et $x - y - t = 0$. En prenant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient donc un vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ représentant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur $w$ de $F^\perp$.

On pose $a_3 = w$, et $a_4 = u(w)$. Les coordonnées de $a_4$ dans $\mathcal{B}$ sont donc $6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $F^\perp$ est stable par $f$ (question III-4c), $(a_3, a_4)$ est une famille d'éléments de $F^\perp$. De plus, $u$ étant antisymétrique, par le même argument que plus haut, $(a_3, a_4)$ est une famille orthogonale, libre car sans 0, de $F^\perp$, qui est de dimension 2 (car supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ d'un espace de dimension 2) Ainsi, $(a_3, a_4)$ est une base orthogonale de $F^\perp$. Il suffit de la normaliser. Or :

$$\|a_3\|^2 = 3 \qquad \text{et} \qquad \|a_4\|^2 = 3 \cdot 6^2,$$

on pose donc $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $c_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille $(c_3, c_4)$ est une base orthonormale de $F^{\perp}$.

Comme $F$ et $F^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux, on en déduit que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ est une base orthonormale de $E$. De plus :

- $u(c_1) = 3u(c_2)$
- $u^2(c_1) = -9u(c_1)$, donc $u(c_2) = -3u(c_1)$.
- $u(c_3) = 6c_4$
- $[u(c_4)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6[c_3]_{\mathcal{B}}$, donc $u(c_4) = -6c_3$.

Par conséquent, la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$