**Correction du Devoir surveillé n° 3**

**Exercice 1 – (d'après ESCL 2003)**

1. Puisque $f$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, la bijectivité de $f$ équivaut à son injectivité. Ainsi, $f$ étant non inversible, $f$ n'est pas injective, donc $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$, donc 0 est valeur propre de $f$.
Comme $f$ est digonalisable en tant qu'endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, si $f$ n'admettait pas d'autre valeur propre que 0, $f$ serait une homothétie de rapport 0, donc l'endomorphisme nul. Cela est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé. Ainsi, $f$ admet au moins une valeur propre non nulle.
2. Soit $\lambda$ et $\mu$ deux valeurs propres de $f$, telles que $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. Alors
$$\langle f(x), y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle x, f(y)\rangle = \mu \langle x, y\rangle .$$
Comme $f$ est symétrique, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. On en déduit que :
$$(\lambda - \mu) \langle x, y\rangle = 0.$$
Comme $\lambda \neq \mu$, il en résulte que $\langle x, y\rangle = 0$.
Cela étant vrai pour tout $x \in E_\lambda$ et tout $y \in E_\mu$, on en déduit que $E_\lambda \perp E_\mu$.
3. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. On a donc, par symétrie de $f$ :
$$\langle x, y\rangle = \langle f(z), y\rangle = \langle z, f(y)\rangle = \langle z, 0\rangle = 0.$$
Ainsi, cela étant vrai pour tout $x$ de $\mathrm{Im}(f)$ et tout $y$ de $\mathrm{Ker}(f)$, on en déduit que $\mathrm{Im}\, f \perp \mathrm{Ker}\, f$. En particulier, $\mathrm{Im}\, f \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.
De plus, comme $E$ est de dimension finie, $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans $E$, donc
$$\dim(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = n - \dim \mathrm{Ker}\, f.$$
De plus, d'après le théorème du rang,
$$\dim \mathrm{Im}\, f = n - \dim \mathrm{Ker}\, f.$$
Ainsi, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$, avec l'égalité des dimensions, donc $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.
Ainsi, $\mathrm{Im}\, f$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}\, f$.
4. Soit $x$ un vecteur de $E$.
   (a) Puisque $f$ est diagonalisable (en tant qu'endomorphisme symétrique d'un espace euclidien), la somme (directe) de ses espaces propres est égale à $E$ tout entier :
   $$E = E_f(0) \oplus E_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_k).$$
   Ainsi, par définition des sommes directes, pour tout $x$ de $E$, il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, \dots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.
   (b) Posons $\lambda_0 = 0$. Soit $j \in [\![0, k]\!]$. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et la somme directe décrite dans la question précédente amène que
   $$E = E_f(\lambda_j) \oplus \left( \bigoplus_{i \in [\![0,k]\!] \setminus \{j\}} E_f(\lambda_i) \right)$$
   Ainsi, $F_j = \left(\oplus_{i \in [\![0,k]\!] \setminus \{j\}} E_f(\lambda_i)\right)$ est le supplémentaire orthogonal de $E_f(\lambda_j)$. Par conséquent, pour tout $y \in E_f(\lambda_j)$ et tout $z \in F_j$, $p_j(y + z) = y$, par définition d'une projection orthogonale.
   Or, étant donné $x \in E$ et une décomposition $x = x_0 + \cdots + x_k$ tel que dans la question précédente, posons
   $$y = x_j \qquad \text{et} \qquad z = \sum_{i \in [\![0,k]\!] \setminus \{j\}} x_i.$$
   Alors $x = y + z$, et $y \in E_f(\lambda_j)$ et $z \in F_j$. Donc
   $$p_j(x) = p_j(y + z) = y = x_j.$$

5. (a) Soit $(i,j) \in [\![0,k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, et soit $x \in E$, et $x = x_0 + \cdots + x_k$ la décomposition de $x$ décrite dans la question 4(a). Alors, d'après la question 4(b) :

$$p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = p_i(x'_0 + \cdots + x'_k),$$

où, pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$, $x'_\ell = 0$ si $\ell \neq j$, et $x'_j = x_j$. Comme pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$, $x'\ell \in E_f(\lambda_\ell)$, la question 4(b) amène :

$$p_i \circ p_j(x) = p_i(x'0 + \cdots + x'_k) = x'_i = 0,$$

puisque $i \neq j$.

(b) Soit $x \in E$, et $x = x_0 + \cdots + x_k$ sa décomposition décrite en 4(a). Alors, $f$ étant linéaire :

$$f(x) = f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_k).$$

Or, $x_0 \in E_f(0) = \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(x_0 = 0$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x_i \in E_f(\lambda_i)$, donc $f(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi :

$$f(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + p_k(x),$$

d'après la question 4(b). Cette égalité étant vraie pour tout $x$ de $E$, on en déduit que

$$f = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k.$$

(c) Soit $q = p_0$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\, f$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux, $p$ et $q$ sont des projecteurs associés. Ainsi,

$$p = \mathrm{id} - q = p_0 + \cdots + p_k - p_0 = p_1 + \cdots + p_k.$$

6. (a) On a, d'après la question 5(b) et la définition de $f^\sharp$ :

$$f \circ f^\sharp = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} p_i\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,k]\!]^2} \lambda_i \frac{1}{\lambda_j} p_i \circ p_j,$$

puisque les $p_i$ sont tous linéaires. De plus les compositions $p_i \circ p_j$ sont nulles sauf si $i = j$, et dans ce cas, puisque $p_i$ est un projecteur, $p_i \circ p_i = p_i$. Ainsi

$$f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{1}{\lambda_i} p_i = \sum_{i=1}^{k} p_i = p,$$

d'après la question 5(c). D'où l'égalité $f \circ f^\sharp = p$.

(b) Soit $(x,y) \in E^2$. L'égalité $f(x) = p(y)$ est vérifiée si et seulement si $f(x) - f \circ f^\sharp(y) = 0$ (d'après la question précédente), donc si et seulement si $f(x - f^\sharp(y)) = 0$, donc si et seulement si $x - f^\sharp(y) \in \mathrm{Ker}\, f$.

7. Soit $y$ un vecteur de $E$.

(a) Soit $x \in E$. Puisque $f(z)$ décrit $\mathrm{Im}(f)$ lorsque $z$ décrit $E$, $\inf_{z\in E} \|f(z) - y\| = \inf_{t\in \mathrm{Im}\, f} |t - y|$.

Soit $t \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\|t - y\| = \|t - p(y) + p(y) - y\|$. Or, $t - p(y) \in \mathrm{Im}(f)$ et $p(y) - y \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$. Donc, d'après le théorème de Pythogore,

$$\|t - y\|^2 = \|t - p(y)\|^2 + \|p(y) - y\|^2 \geqslant \|t - p(y)\|^2,$$

l'inégalité étant stricte si $t \neq p(y)$.

Ainsi, la borne inférieure est un minimum, pris en $p(y)$, et seulement en $p(y)$.

Par conséquent, puisque $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x)$ réalise le minimum de $|t - y|$ si et seulement si $f(x) = p(y)$, d'où le résultat d'après la question 6(b).

Remarquez que cet argument n'est rien d'autre que de dire que le projeté orthogonal est le vecteur de meilleure approximation !

(b) D'après la question 6(a) :

$$\|f(f^\sharp(y)) - y\| = \|p(y) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|,$$

la dernière égalité résultant de ce qui précède.
De plus, soit $x$ un autre vecteur vérifiant $\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|$. Alors $x - f^\sharp y \in \operatorname{Ker} f$. Il existe donc $z \in \operatorname{Ker} f$ tel que $x = f^\sharp + z$. Comme $f^\sharp(y) \in \operatorname{Im} f$ et $z \in \operatorname{Ker}(f)$ et que $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$, la relation de Pythagore amène

$$\|x\|^2 = \|f^\sharp(y)\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|f^\sharp(y)\|^2.$$

Ainsi, tous les autres vecteurs $x$ vérifiant cette relation sont de norme supérieure à $f^\sharp(y)$.
On en déduit que $f^\sharp(y)$ est le plus petit des vecteurs $x$ vérifiant $\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|$.

**Exercice 2 – (ESC 2005)**

1. À l'issue du premier tirage, on peut avoir retiré une des deux boules rouges mais par les deux. Ainsi, $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$.
   - L'événement $[Y_1 = 1]$ est réalisé si et seulement si on a tiré une des deux boules rouges (sur 3 boules) lors du premier tirage. Ainsi, $[Y_1 = 1] = R_1$, d'où, les boules étant indiscernables (donc le tirage équiprobable) :
   $$P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}.$$
   - L'événement $[Y_1 = 2]$ est réalisé si et seulement si on a tiré la boule bleue (sur 3 boules) lors du premier tirage. Ainsi, $[Y_1 = 2] = B_1$, d'où
   $$P(Y_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{3}.$$
2. Si $n \geqslant 2$, on peut avoir tiré 0 (car il y a toujours des boules bleues), 1 ou 2 fois des boules rouges, mais pas plus, puisqu'on les retire alors du jeu. Ainsi, il reste dans l'urne 0, 1 ou 2 boules rouges. Donc $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
3. L'événement $[Y_n = 2]$ est réalisé si et seulement si lors des $n$ premiers tirages, on ne retire (donc on ne tire) pas de boule rouge. Ainsi
$$[Y_n = 2] = B_1 \cap \cdots \cap B_n.$$
Attention, les $B_i$ ne sont ici pas mutuellement indépendants, car le nombre de boules bleues dans l'urne à un moment donné (donc la probabilité de tirer une boule bleue) dépend des boules qu'on a tirées auparavant. Il faut donc utiliser la formule des probabilités composées :
$$P(Y_n = 2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)\dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n).$$
Or, $P(B_1) = \frac{1}{3}$, et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, si $B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}$ est réalisé, alors il reste toujours 2 boules rouges et une boule bleue dans l'urne avant d'effectuer le $i$-ième tirage, donc
$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{1}{3}.$$
Par conséquent $P(Y_n = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
4. (a) On a vu que $u_1 = P(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$.
L'événement $[Y_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on a tiré une et une seule boule rouge lors des deux premiers tirages, soit au premier tirage, soit au deuxième. Ainsi
$$[Y_2 = 1] = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2).$$
Les événements $R_1 \cap B_2$ et $B_1 \cap R_2$ étant incompatibles, on a
$$P(Y_2 = 1) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2).$$
Or, si la première boule tirée est rouge, il reste avant le deuxième tirage 2 boules bleues et une boule rouge, donc $P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3}$, et de même, si la première boule tirée est bleue, il reste avant le deuxième tirage une boule bleue et deux boules rouges, donc $P_{B_1}(R_2) = \frac{2}{3}$. Ainsi :
$$P(Y_2 = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Utilisons la formule des probabilités totales sur le système complet $[Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2]$ constitué d'événements non quasi-impossibles (puisqu'on peut exhiber pour chacun de ces événements une suite particulière de tirages adéquate qui est clairement de probabilité non nulle) :

$$P(Y_{n+1} = 1) = P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 0)P(Y_n = 0) + P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 1)P(Y_n = 1) + \\ + P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 2)P(Y_n = 2)$$

Or :

- Si $[Y_n = 0]$ est réalisé, l'événement $[Y_{n+1} = 1]$ ne peut pas être réalisé, car à aucun moment on n'ajoute de boule rouge. Ainsi, $P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 0) = 0$.
- Si $[Y_n = 1]$ est réalisé, l'événement $[Y_{n+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire une boule bleue au $n+1$-ième tirage, sachant qu'à ce moment-là, il ne reste plus qu'une boule rouge, et donc deux boules bleues (le nombre total de boule faisant toujours 3). Ainsi,

$$P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 1) = \frac{2}{3}.$$

- Si $[Y_n = 2]$ est réalisé, l'événement $[Y_n = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire une boule rouge au $n+1$-ième tirage, sachant qu'à ce moment-là, il reste dans l'urne les deux boules rouges, et une seule boule bleue. Donc :

$$P(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 2) = \frac{2}{3}.$$

Ainsi :

$$P(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \text{donc:} \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Pour $n = 1$, $u_2 = \frac{2}{3}$, et $\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^2} = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, donc la relation est encore valable.

(c) On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}v_n.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

En écrivant $v_1$ en fonction de $u_1$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(u_1 + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le système $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ est complet, donc

$$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^n} = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}.$$

Remarquez que pour $n = 1$, on retrouve $P(Y_1 = 0) = 0$, ce qui est normal puisque cet événement est impossible.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable $Y_n$ prend un nombre fini de valeurs : 0, 1 ou 2. Donc son espérance existe. Ainsi :

$$E(Y_n) = 0 \cdot P(Y_n = 0) + 1 \cdot P(Y_n = 1) + 2 \cdot P(Y_n = 2) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

6. (a) La deuxième boule rouge peut être tirée à n'importe quel tirage à partir du deuxième tirage (en tirant un nombre adéquat de fois une boule bleue, ce qui est possible). Ainsi, $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

(b) Soit $k \geqslant 2$. L'événement $[Z = k]$ est réalisé si et seulement si à l'issue du $k-1$-ième tirage, il reste au moins une boule rouge, et à l'issue du $k$-ième tirage, il n'en reste plus. Comme on retire au plus une boule rouge à chaque tirage, cela impose que le nombre de boules rouges à l'issue du $k-1$-ième tirage soit exactement 1. Ainsi,

$$[Z = k] = [Y_{k-1} = 1] \cap [Y_k = 0].$$

(c) Attention, les deux événements ci-dessus ne sont pas indépendants, il faut donc utiliser des probabilités conditionnelles. Comme $[Y_{k-1} = 1]$ n'est pas presque-impossible, on peut écrire :

$$\forall k \geqslant 2, \quad P(Z = k) = P(Y_{k-1} = 1)P(Y_k = 0 \mid Y_{k-1} = 1).$$

La valeur de $P(Y_{k-1} = 1)$ est donnée par la question 4(c). De plus, si l'événement $Y_{k-1} = 1$ est réalisé, il reste dans l'urne avant le $k$-ième tirage 1 boule rouge et 2 boules bleues. De plus, l'événement $Y_k = 0$ est alors réalisé si et seulement si on tire une boule rouge. Ainsi $P(Y_k = 0 \mid Y_{k-1} = 1) = \frac{1}{3}$. On en déduit que

$$\forall k \geqslant 2, \quad P(Z = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} - \frac{2}{3^{k+1}}.$$

7. **Simulation informatique.**
Voici la fonction rectifiée et complétée.

```
function simulation:integer;

var b,r,n:integer;

begin
  randomize;
  b:=1;
  r:=2;
  n:=0;
  repeat
    if random(r+b)<r then
      begin
        b:=b+1;
        r:=r-1;
      end;
    n:=n+1;
  until
    r=0;
  simulation:=n;
end;
```

Quelques commentaires :

- Ici, il s'agit d'une fonction ne dépendant d'aucun paramètre : elle se contente de renvoyer une valeur aléatoire, en suivant une certaine loi. Il n'y a donc par de paramètre d'entrée à préciser. En revanche, n'oubliez pas de définir le type du résultat, comme d'habitude.
- N'oubliez pas non plus de déclarer les variables.
- L'entier $r$ est le nombre de boules rouges, à l'instant considéré. De même, $b$ représente le nombe de boules bleues. Quant à $n$, c'est le nombre de tirages effectués. Initialement $r$ a la valeur 2, tandis que $b$ a la valeur 1. Attention, ce sont des affectations, à écrire avec `:=` et non simplement `=`.
- Dans la boucle, on effectue un tirage sur l'ensemble des boules ($r + b$ ; on aurait pu remarquer que cette valeur vaut toujours 3). On effectue des modifications de l'urne si on tire une boule rouge, ce qui se fait avec une probabilité de $\frac{r}{b+r}$, ce qui correspond au fait d'obtenir à l'aide de la fonction `randomr+b` une des $r$ valeurs $0, 1 \ldots, r-1$, d'où le test `randomr+b < r`.
- Si le test est positif (donc on a tiré une boule rouge) : il reste dans l'urne une boule rouge de moins et une boule bleue de plus, d'où les modifications faites aux variables $r$ et $b$. Attention, il y a deux instructions à mettre dans cette clause conditionnelle : n'oubliez pas dans ce cas le `begin ... end;`
- Si le test est négatif, on ne modifie pas le contenu de l'urne : il n'y a rien à faire, et on n'a donc pas besoin de la clause alternative `else...`

- On s'arrête lorsqu'on tire la dernière boule rouge, donc la première fois qu'on a $r = 0$.
- Enfin, il ne faut pas oublier de définir la valeur de sortie de la fonction, égal au nombre $n$ de tirages effectués.
- Et pour terminer : la fin de la fonction n'est pas la fin du programme, donc il faut un point-virgule et non un point.

**Problème –**

**Partie I – Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

1. Il est inutile de dériver ici : $f$ est le produit de deux fonctions croissantes **et positives** sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$. Ainsi, $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, les valeurs au bord étant, puisque $f$ est continue, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot$
2. La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, donc $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par $f$. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

   D'autre part, $f$ est croissante sur l'intervalle stable $\mathbb{R}_+$, donc puisque $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone sur. Redémontrons-le rapidement :
   - Supposons que $u_1 \geqslant u_0$. Alors montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, l'initialisation étant donnée par la supposition. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ces valeurs étant dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et $f$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. D'après le principe de récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dopnc croissante.
   - Un raisonnement similaire montre que si $u_1 \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   **En début de copie, il est impératif de faire cette preuve (dans un des deux cas seulement bien entendu), en s'autorisant éventuellement à écrire la récurrence, ici facile, un peu rapidement. En fin de copie, on admettra que vous vous dispensiez**

   Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, donc admet une limite (finie ou infinie).
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x \operatorname{Arctan} x = x \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \operatorname{Arctan} x = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

   Ainsi, les points fixes de $f$ sont 0 et $\frac{\pi}{4}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\iff x \operatorname{Arctan} x > x \\ &\iff x \neq 0 \text{ et } \operatorname{Arctan} x > 1 \\ &\iff x \in ]\frac{\pi}{4}, +\infty[. \end{aligned}$$

   Ainsi, $g$ s'annule en 0 et $\frac{\pi}{4}$, est négative sur $]0, \frac{\pi}{4}[$, et positive sur $]\frac{\pi}{4}, +\infty[$.
4. On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, et $f$ est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $f(]0, \frac{\pi}{4}[) \subset ]0, \frac{\pi}{4}[$ et $f(]\frac{\pi}{4}, +\infty[) \subset ]\frac{\pi}{4}, +\infty[$. Ces deux intervalles sont donc stables par $f$.
   - Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur (et donc de limite) nulle.
   - Si $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{4}[$, alors, cet intervalle étant stable par $f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0, \frac{\pi}{4}[$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; étant monotone, elle est donc convergente.

     De plus, $g$ est négative sur cet intervalle, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ étant dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, on obtient $f(u_n) < u_n$, donc $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

     Comme $f$ est continue sur l'intervalle fermé $[0\frac{\pi}{4}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $f$ dans cet intervalle, donc vers 0 ou vers $\frac{\pi}{4}$. Comme elle est strictement décroissante, sa limite est nécessairement 0.
   - Si $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur (et donc de limite) $\frac{\pi}{4}$.
   - Si $u_0 \in ]\frac{\pi}{4}, +\infty[$, le même raisonnement que plus haut montre que cette fois $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $f$ étant continue sur $[\frac{\pi}{4}, +\infty[$, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de $f$ ou un bord de l'intervalle, donc $\frac{\pi}{4}$ ou $+\infty$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement coroissante et supérieure à $\frac{\pi}{4}$, sa limite ne peut pas être cette dernière valeur, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Partie II – Étude des séries $\sum u_n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et $\sum u_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.**

1. (a) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} u_n = \operatorname{Arctan}(0) = 0$, puisque la fonction Arctan est continue en 0.
Ainsi, $\operatorname{Arctan} u_n = o(1)$, donc $u_{n+1} = u_n \operatorname{Arctan} u_n = u_n o(1) = o(u_n)$.
Par conséquent, $u_{n+1}$ étant négligeable devant $u_n$, on obtient : $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -u_n$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. On a alors
$$\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_0,$$
car il s'agit d'une somme téléscopique. Comme $(u_n)$ admet une limite finie, cette dernière expression admet une limite finie lorsque $N$ tend vers $+\infty$. Ainsi, la série de terme général $\sum u_{n+1} - u_n$ converge Or, cette série est à termes de signe constant (négatif), car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante dans ce cas (cas ou $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{4}[$). Et de même $\sum -u_n$ est à termes tous négatifs. Ainsi, d'après la question 1(a) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, la série de terme général $-u_n$ converge, donc aussi la série de terme général $u_n$.

2. (a) Si $x = 0$ ou si $u_0 = 0$, le quotient $\frac{vn+1}{v_n}$ n'est pas défini.
Si $x \neq 0$ et $u_0 \neq 0$, alors on est dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit strictement en tendant vers 0, donc $u_n$ ne s'annule pas, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. On peut donc considérer le quotient
$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| = |x| \operatorname{Arctan} u_n.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} u_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = 0$.

   (b) **Cas $x \neq 0$ et $u_0 \neq 0$**
Ainsi, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,
$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{soit:} \qquad |v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|.$$
Une récurrence rapide montre qu'alors : $\forall n \geqslant N,\ \ |v_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} |v_N|$.
Or, $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} |v_N|$ converge en tant que série géormétrique de raison $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$, donc, les séries étant à termes positifs, la série $\sum |v_n|$ converge, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, donc la série $\sum u_n x^n$ converge absolument , donc converge.
**cas $x = 0$ ou $u_0 = 0$.** Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n x^n = 0$, sauf éventuellement pour $n = 0$. Ainsi la somme se réduit à un terme au maximum, donc la série est convergente !

**Partie III – Étude de la série $\sum u_n x^n$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.**

Remarque : vous pouviez voir une autre méthode, plutôt plus élémentaire, pour montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans ce paragraphe admet une limite non nulle, en étudiant directement la monotonie de cette suite. Cependant, utilisez la méthode imposée par l'énoncé. Si l'énoncé suggère cette méthode, c'est qu'on veut vous tester sur certains points spécifiques apparaissant au cours de cette méthode...

1. (a) Pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, nous sommes dans le cas où $u_0 \in ]\frac{\pi}{4}, +\infty[$. Or, dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]\frac{\pi}{4}, +\infty[$ cet intervalle étant stable par $f$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

   (b) Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} u_n = \frac{\pi}{2}$, puisque $(u_n)$ tend vers $+\infty$.
Ainsi, $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \cdot u_n$, donc $\frac{1}{u_{n+1}} \sim_{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n}$, et donc
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right) \qquad \text{puis:} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right) = \left(\frac{2}{\pi} - 1\right)\frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$
Ainsi, $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{\pi} - 1\right)\frac{1}{u_n}$
Remarquez le passage aux petit-$o$ pour faire la somme dans l'équivalent.

(c) On raisonne de même qu'en II-1(b).
On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{N+1}} - \frac{1}{u_0},$$

et cette dernière quantité admet une limite finie lorsque $N$ tend vers $+\infty$, puisque $\frac{1}{u_{N+1}}$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$.
Ainsi, la série $\sum \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ converge. De plus, elle est à termes négatifs, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans ce cas. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, $\sum \left(\frac{2}{\pi} - 1\right) \frac{1}{u_n}$ est convergente aussi, donc $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.

2. (a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \operatorname{Arctan} u_n,$$

donc, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Tout d'abord, si $x = 0$, la série ne comporte qu'un terme non nul donc est (absolument) convergente.
Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| = \frac{\pi}{2} \cdot |x|$.

- Cas où $|x| < \frac{2}{\pi}$, $x \neq 0$.
Dans ce cas, $\frac{\pi}{2} \cdot |x| < 1$. Soit $\ell \in ]\frac{\pi}{2} \cdot |x|, 1[$. En choisissant $\varepsilon = \ell - \frac{\pi}{2} \cdot |x| > 0$ dans la définition de la limite, on a donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| < \ell \qquad \text{soit:} \qquad \left|u_{n+1}x^{n+1}\right| < \ell \left|u_n x^n\right|.$$

Comme dans la question II-2(a), on obtient : $\forall n \geqslant N, \quad |u_n x^n| \leqslant \ell^{n-N} |u_N x^N|$.
Ainsi, le terme positif $|u_n x^n|$ est majoré par le terme général d'une série géométrique de raison $\ell \in ]0, 1[$, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n x^n$ converge absolument, donc converge.

- Cas où $|x| > \frac{2}{\pi}$.
Dans ce cas, $\frac{\pi}{2} \cdot |x| > 1$. En choisissant $\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot |x| - 1$ dans la définition d'une limite, on obtient :

$$\exists, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| > 1 \qquad \text{soit:} \qquad \left|u_{n+1}x^{n+1}\right| > \left|u_n x^n\right|.$$

Ainsi, la suite $(|u_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang $N$, et positive, donc elle ne tend pas vers 0, donc $(u_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus. Ainsi, $\sum u_n x^n$ diverge, la divergence étant grossière.

3. (a) Puisque $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u_n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, et que $\tan x \underset{0}{\sim} x$, on a :

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u_n \underset{+\infty}{\sim} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u_n\right) = \frac{1}{\tan(\operatorname{Arctan} u_n)} = \frac{1}{u_n}.$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\ln w_{n+1} - \ln w_n = \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} u_n\right)$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} u_n = 1$, donc : $\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} u_n\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n}$.
Or, $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente d'après III-1(c), et à termes positifs. Donc $\sum -\frac{2}{\pi}\frac{1}{u_n}$ est convergente à termes négatifs. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, valable aussi pour les séries à termes tous négatifs, on en déduit que $\sum \ln w_{n+1} - \ln w_n$ converge.

(c) Ainsi, la somme partielle de cette série admet une limite réelle. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \ln w_{n+1} - \ln w_n = \ln w_{N+1} - \ln w_0.$$

Ainsi, $(\ln w_n)_{\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie $\ell$. Par continuité de l'exponentiellen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, égale à $e^{\ell}$, donc strictement positive (et en particulier non nulle).

(d) On en déduit que $\sum w_n$ diverge grossièrement.

4. D'après la question précédente, $\left(\left|u_n\left(-\frac{2}{\pi}\right)^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, donc $\left(u_n\left(-\frac{2}{\pi}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ non plus. Donc $\sum u_n\left(-\frac{2}{\pi}\right)^n$ diverge grossièrement.