Correction Concours blanc n° 1 – Épreuve n° 1

Épreuve type HEC

Problème – (ESCP 1997)

Partie I – Trois résultats utiles par la suite

1. (a) La fonction $f : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale possède deux impropriétés en $-\infty$ et en $+\infty$.

   De plus, d'après les théorèmes de croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

   Donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et également au voisinage de $-\infty$. Comme les intégrales

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} et \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

   convergent, on en déduit, par comparaison des intégrales de fonctions de signe constant (c'est le cas au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$) par négligeabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties, en posant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^{n-1}$$

   Alors, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = (n-1)x^{n-2}.$$

   De plus, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x)v(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to-\infty} u(x)v(x) = 0$$

   Ainsi, l'existence de ces deux limites nous autorise à faire l'intégration par parties sur l'intégrale impropre, et :

$$\begin{aligned} I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[u(x)v(x)\Big]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= (n-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

   (c) • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = 0,$$

   car la fonction $x \mapsto x^{2n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire, et l'intégrale est convergente. En effet, du fait de la convergence de l'intégrale, on peut écrire

$$I_{2n+1} = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$$

Or, cette dernière intégrale est nulle, d'après les propriétés des intégrales définies de fonctions impaires.

Attention, cet argument n'est pas suffisant pour prouver la convergence de l'intégrale, comme le prouve l'exemple donné dans le cours de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$. En effet, pour l'étude de la convergence, il est nécessaire de faire tendre les deux bornes indépendamment (donc en utilisant deux variables différentes). En revanche, une fois la convergence prouvée, on peut tout à fait lier les deux bornes. Vous pouvez aussi remarquer qu'on peut obtenir le résultat directement par un changement de variable $t = -x$ sur une moitié de l'intégrale, comme on le fait pour les intégrales définies, sans se ramener au résultat connu pour les intégrales définies.

- Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

  On a :

  $$I_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1,$$

  d'après le rappel effectué dans le préambule du problème (remarquez que ce résultat s'obtient par un changement de variable simple de la valeur de l'intégrale de Gauss).

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  Soit $n \in \mathbb{N}$, telle que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors, d'après la question 1(b),

  $$I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} = \frac{(2n)!(2n+1)}{2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2n \cdot 2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai aussi.

  Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(d) Cette intégrale est combinaison linéaire d'un nombre fini d'intégrales I_n, qui sont toutes convergentes, donc elle est convergente. On peut s'y prendre directement aussi en utilisant un équivalent de P (donné par son terme de plus haut degré), puis un argument similaire à celui de la question 1(a).

2. Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{C^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$

(a) La série $\sum \dfrac{C^{2n}}{n!}$ est une série exponentielle de paramètre C^2, donc convergente. Ainsi, son terme général tend vers 0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C^{2n}}{n!} = 0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+1} = \frac{C^{2n+1}}{\left[\frac{2n+1}{2}\right]!} = \frac{C^{2n+1}}{n!} = C \cdot u_{2n}.$$

Ainsi, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et sa limite est $C \cdot 0 = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0,$$

donc, d'après le rappel de l'énoncé (qui nous dispense d'en redonner la preuve), on obtient la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{C^{2k}}{k!} + \frac{C^{2k+1}}{k!} = \frac{C^{2k}}{k!} \cdot (1 + C).$$

Ainsi, $\sum u_{2k} + u_{2k+1}$ est une série exponentielle de paramètre C^2, au facteur multiplicatif constant $1 + C$ près. Ainsi, elle est convergente, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + u_{2k+1} = (1 + C)\mathrm{e}^{C^2}.$$

(c) Le réel C étant positif, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante. Ainsi, elle admet une limite finie ou infinie. Or, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{2k} + u_{2k+1}$, donc admet une limite finie d'après la question précédente. Ainsi, puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un limite (cette existence est importante pour que l'argument tienne la route), cette limite est la même que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle est finie. Par conséquent, $\sum u_n$ converge. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + u_{n+1} = (1 + C)\mathrm{e}^{C^2}.$$

3. (a) Soit $\lambda \in [-a, a]$, et $n \in \mathbb{N}$. La majoration de $g^{(n)}$ étant valable pour tout n, elle l'est en particulier pour $n + 1$. Ainsi,

$$\forall t \in [-a, a], \quad |g^{(n+1)}(t)| \leqslant \frac{K^{n+1} \cdot (n + 1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}.$$

Cette inégalité est *a fortiori* vrai entre 0 et λ. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire (attention au cas où $\lambda < 0$, il faut dans ce cas échanger les bornes de l'intégrale, l'inégalité triangulaire n'étant valable que pour des bornes données dans le bon sens ; d'où le min et le max dans ce qui suit)

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{\min(0,\lambda)}^{\max(0,\lambda)} \frac{|\lambda - t|^n}{n!} |g^{(n+1)}(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{\min(0,\lambda)}^{\max(0,\lambda)} \frac{|\lambda - t|^n}{n!} \frac{K^{n+1} \cdot (n + 1)!}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{K^{n+1} \cdot (n + 1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \int_{\min(0,\lambda)}^{\max(0,\lambda)} |\lambda - t|^n\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme $(\lambda - t)^n$ est de signe constant entre 0 et λ, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{K^{n+1} \cdot (n + 1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \left|\int_0^\lambda (t - \lambda)^n\ \mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{K^{n+1} \cdot (n + 1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} \frac{1}{n+1} \left|(-\lambda)^{n+1} - 0^{n+1}\right| \\
&= \frac{(K \cdot \lambda)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}.
\end{aligned}$$

D'après la question 2(a), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(K \cdot \lambda)^{n+1}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]!} = 0,$$

par conséquent, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in [-a, a]$. D'après la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n, la fonction g étant de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$g(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot \lambda^k = \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

En prenant la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot \lambda^k$ converge, et que :

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot \lambda^k.$$

Si g est une fonction polynomiale, pour tout $k > \deg(g) = d$, $g^{(k)} = 0$. Ainsi,

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot \lambda^k.$$

On retrouve une égalité connue (formule de Taylor pour les polynômes).

Partie II – Les polynômes de Hermite

1. Tout d'abord, l'intégrale est convergente pour tout polynôme P et Q, d'après la question I-1(d). Ainsi, $\langle P, Q\rangle$ est définie pour tout couple (P, Q) de polynômes.

   Vérifions que cela définit un produit scalaire.

   - Soient P, Q, R trois polynômes, et λ un scalaire. Alors

     $$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + Q(x))R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x.$$

     Les intégrales étant toutes convergentes, on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :

     $$\langle \lambda P + Q, R\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)R(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \lambda \langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.$$

     Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.
   - Clairement, le produit de polynômes étant commutatif, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
   - Étant symétrique et linéaire par rapport à sa première variable, elle est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est positif. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\langle P, P\rangle \geqslant 0$.
   - De plus, pour tout polynôme P, la fonction $x \mapsto P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et positive, on en déduit que $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

     $$P(x)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad P(x) = 0,$$

     du fait que $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$.

   Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, donc c'est un produit scalaire.

2. On effectue une orthonormalisation par la méthode de Schmidt de la base $(1, X, X^2, X^3)$. On note (f_0, f_1, f_2, f_3) la famille orthonormale obtenue par le procédé de Schmidt. Nous n'effectuons par tous les calculs de normalisation, du fait qu'on ne demande qu'une famille orthogonale, et non orthonormale.

   - On a :

     $$\|1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = I_0 = 1,$$

     Donc $\|1\| = 1$, donc $f_0 = \frac{1}{\|1\|} = 1$.
   - Soit

     $$u_1 = X - \langle X, f_0\rangle f_0 = X - \langle X, 1\rangle 1 = X - I_1 = X,$$

     On a alors $\|u_1\|^2 = I_2 = 1$, donc $\|u_1\| = 1$, et par conséquent,

     $$f_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = X.$$

- Soit
$$u_2 = X^2 - \langle X^2, 1\rangle 1 - \langle X^2, X\rangle X = X^2 - I_2 \cdot 1 - I_3 X = X^2 - 1.$$
Ainsi, $f_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$.
- Soit
$$\begin{aligned} u_3 &= X^3 - \langle X^3, 1\rangle 1 - \langle X^3, X\rangle X - \frac{1}{\|X^2-1\|^2} \langle X^3, X^2-1\rangle (X^2-1) \\ &= X^3 - I_3 - I_4 X - (I_5 - I_3)\frac{(X^2-1)}{\|X^2-1\|^2} = X^3 - I_4 X = X^3 - 3X. \end{aligned}$$
Ainsi, $f_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$.

On en déduit que $(1, X, X^2-1, X^3-3X)$ est une famille orthogonale. Les coefficients dominants sont bien 1, et ils engendrent le même espace que $(1, X, X^2, X^3)$, donc $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, une famille orthogonale constituée d'éléments non nuls étant une famille libre, on en déduit qu'il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   - $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_0(x) = 1$;
   - $g'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_1(x) = x$;
   - $g''(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_2(x) = x^2 - 1$;
   - $g^{(3)}(x) = -x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = (-x^3+3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $H_3(x) = x^3 - 3$.

   Tiens donc ! on retrouve la famille de la question 2 !

   (b) - Suivons l'indication de l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = h^{(n)}(x) = (g \cdot k)^{(n)}(x),$$
   où $k = -\mathrm{id}$. Ainsi, d'après la formule de Leibniz,
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n+1)}(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} g^{(n-p)}(x) k^{(p)(x)}.$$
   Or, k est une fonction polynomiale de degré 1, donc pour tout $p \geqslant 2$, $k^{(p)} = 0$. Ainsi
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad g^{(n+1)}(x) = \binom{n}{0} g^{(n)}(x)k(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)k'(x) = -xg^{(n)}(x) - ng^{(n-1)}(x).$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n+1)}(x) = x(-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x) - n(-1)^{n-1} g^{(n-1)}(x) \\ &= xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$H_n'(x) = (-1)^n \left(x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x) + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n+1)}(x)\right) = xH_n(x) - H_{n+1}(x) = nH_{n-1}(x),$$
   d'après la relation (1).

   (c) Le calcul de H_0, H_1, H_2, H_3 nous permet de conjecturer que pour tout n, H_n est un polynôme de degré n, de la même parité que n, et de coefficient dominant 1. Montrons cela par récurrence.

   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: H_n est un polynôme unitaire de degré n, de même parité que n.

   D'après le calcul de H_0 et de H_1, les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vrai. Alors, d'après la relation (1), H_{n+1} est un polynôme, en tant que produit et combinaison linéaires de polynômes (car H_n et H_{n-1} sont des polynômes d'après l'hypothèse de récurrence).

De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, $\deg H_{n+1} = n+1 > 0$ donc, d'après la relation (2) au rang $n+2$, $\deg H'_{n+2} = n+1 > 0$, donc $\deg H_{n+2} = n+2$.

Par ailleurs, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k le coefficient dominant de H_k. Alors, par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = 1$. De plus, d'après la relation (2), H_{n+2} étant de degré $n+2$ (donc a_{n+2} étant le coefficient du terme de degré $n+2$ de ce polynôme), on a la relation : $(n+2)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1}$, donc, puisque $n+2 \neq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} = 1$.

Enfin, H_n étant de la parité de n, et X étant impair, XH_n est de la parité de $n+1$. De même, nH_{n-1} est, par hypothèse de récurrence, de la parité de $n-1$, donc de $n+1$. Ainsi, d'après la relation (1), H_{n+1} est de la parité de $n+1$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

4. **Programmation**

(a) La multiplication par X revient à décaler les coefficients ves la droite (le coefficient de degré k devient le coefficient de degré $k+1$). Le coefficient de degré 0 du résultat est nul (le polynôme XP n'a pas de terme constant)

```
procedure MULTIX(P:Poly; var Q:Poly);

var k:integer;

begin
Q[0]:=0;
for k:=1 to 20 do
  Q[k]:= P[k-1];
end;
```

N'oubliez pas de passer Q en paramètre variable. Remarquez qu'il aurait été plus judicieux de définir une constante de valeur 20, pour que cette valeur soit plus facilement modifiable par la suite. Mais l'énoncé étant ce qu'il est, on travaille avec une valeur en dur.

(b) Pour n dans $[\![2, 20]\!]$, le degré de H_n ne dépasse pas 20, par conséquent, le type `Poly` est suffisant.

De plus, le fait de prendre $n \geqslant 2$ dispense de discuter du cas des petites valeurs de n (initialisation) dans le programme.

La procedure ci-dessous, utilisant la procedure de la question précédente, doit être placée dans le même programme, **après** la procedure MULTIX

```
procedure HERMITE(n:integer; var H: Poly);

var k,i:integer;
    L,M,P:Poly;     {H: dernière valeur en cours de H_k
                   L: avant-dernière valeur en cours
                   M,P: variable de calcul}

begin
  L[0]:=1;           {initialisation de L à H_0}
  for i:=1 to 20 do
    L[i]:=0;
  H[0]:=0;           {initialisation de H à H_1}
  H[1]:=1;
  for i:=2 to 20 do
```

```
  H[i]:=0;
  for k:=2 to n do
                    {au début de la boucle, H=H_(k-1), L=H_(k-2)}
    begin
      P:=H;         {sauvegarde de H}
      MULTIX(H,M);  {calcul de XH_(k-1), stocké dans M}
      for i:=0 to 20 do
        H[i]:= M[i] -n*L[i];  {calcul de H_k, stocké dans H}
      L:=P;         {actualisation de L à H_(k-1)}
    end;
                    {à la fin de la boucle, H=H_k, L=H_(k-1)}
                    {lorsqu'on sort de la structure for,
                    H=H_n et L=H_(n-1)}
end;
```

Partie III – $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(x)g^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}P(x)H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{+\infty}{\sim} ax^{d+n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

où a est le coefficient dominant du polynôme $(-1)^{n-1}P$, et d son degré. Ainsi, d'après les croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Il est étonnant que l'énoncé fasse admettre le résultat pour la limite en $-\infty$, car les mêmes croissances comparées permettent de conclure directement de même en $-\infty$ (c'est presque moins long à écrire que de dire qu'on admet le résultat en $-\infty$).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ainsi, deux cas se produisent :

- Si $n > 0$, alors (la convergence de l'intégrale nous permet d'affirmer l'existence des limites dans la variation de la primitive)

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\left[g^{(n-1)}(x)\right]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} = 0,$$

d'après la question III-1(a), appliquée au polynôme $P = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle H_n, H_0\rangle = 0$.

- Si $n = 0$, alors

$$\langle H_0, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = 1,$$

d'après le rappel effectué dans le préambule du problème.

(c) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On a, en utilisant la définition de H_n :

$$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Effectuons une intégration par parties sur cette intégrale, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u(x) = H_m(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = g^{(n-1)}(x).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = H'_m(x) = mH_{m-1}(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = g^{(n)}(x).$$

De plus, d'après la question III-1(a), appliquée au polynôme $P = H_m$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} u(x)v(x).$$

Par conséquent, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \Big[u(x)v(x)\Big]_{\lim_{-\infty}}^{\lim_{+\infty}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{n-1} m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) g^{(n-1)}(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(x) H_{n-1}(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x = m \left\langle H_{n-1}, H_{m-1} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Soit $m < n$ deux entiers positifs. Alors, en itérant la relation ci-dessus, on obtient :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m! \langle H_{n-m}, H_0 \rangle = 0,$$

puisque $n - m > 0$, et d'après la question 1(b).
Ainsi, les H_n sont deux à deux orthogonaux, donc forment une famille orthogonale.
De plus, de la même façon,

$$\langle H_n, H_n \rangle = n! \langle H_0, H_0 \rangle = n!$$

toujours d'après la question 1(b).

2. (a) La famille $(H_0, \dots, H_k)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$, constituée de vecteurs non nuls, donc libre. Elle est de cardinal $k + 1 = \dim \mathbb{R}_k[X]$, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
De plus, $H_{k+1} \in \mathrm{Vect}(H_0, \dots, H_k)^{\perp} = \mathbb{R}_k[X]^{\perp}$, par conséquent,

$$\forall R \in \mathbb{R}_k[X], \quad \langle H_{k+1}, R \rangle = 0$$

.

(b) Suivons l'indication de l'énoncé. Puisque H_{k+1} est de degré $k+1$, et unitaire, son monôme dominant est X^{k+1}. Ainsi, Q est de degré au plus k (les termes de degré $k + 1$ se compensent). De plus, par hypothèse, P est de degré au plus k. Ainsi, $Q - P$ est un élément de $\mathbb{R}_k[X]$.
On déduit alors de la question précédente que

$$\langle H_{k+1}, Q - P \rangle = 0.$$

Ainsi, d'après la relation de Pythagore,

$$\|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2 = \|H_{k+1} + Q - P\|^2 = \|X^{k+1} - P\|^2.$$

Cette expression est minimale lorsque P (parcourant $\mathbb{R}_k[X]$) est égal à Q. Ainsi, le polynôme Q minimise la distance de X^{k+1} à un point de $\mathbb{R}_k[X]$, donc Q est le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$.

(c) Par définition du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(G_0, \dots, G_k) = \mathrm{Vect}(X^0, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X].$$

De plus, pour tout k in $[\![0, n]\!]$, G_{k+1} est le normalisé de la différence entre X^{k+1} et le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathrm{Vect}(G_0, \dots, G_k) = \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$G_{k+1} = \frac{X^{k+1} - Q}{\|X^{k+1} - Q\|} = \frac{H_{k+1}}{\|H_{k+1}\|} = \frac{H_{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}}.$$

Comme on a aussi $G_0 = 1 = H_0$, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $G_k = \dfrac{H_k}{\sqrt{k!}}$

Partie IV – Un développement en série de Hermite

1. Puisque $\left(\frac{H_k}{\sqrt{k!}}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, on a, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \left\langle P, \frac{H_k}{\sqrt{k!}} \right\rangle \frac{H_k}{\sqrt{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \langle P, H_k\rangle \frac{H_k}{k!}.$$

2. (a) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n\right| \leqslant \frac{(K\lambda)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$$

Or, d'après la question I-2, la série de terme général $\dfrac{(K\lambda)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$ converge. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\left|\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n\right|$ converge, donc la série de terme général $\dfrac{H_n(x)}{n!}\lambda^n$ converge absolument, donc converge.

(b) On a, pour tout λ réel :

$$g_x(\lambda) = g(\lambda - x).$$

Ainsi, $g_x'(\lambda) = g'(\lambda - x)$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(x) = g^{(n)}(\lambda - x) = (-1)^n H_n(\lambda - x)\mathrm{e}^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors tout d'abord, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a, a]$, et d'après l'hypothèse fait en début de question 2, il existe K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\forall y \in [-a-x, a-x],\ \left|\frac{H_n(y)}{n!}\right| \leqslant \frac{K^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \qquad \text{donc:} \qquad \forall \lambda \in [-a, a], \left|\frac{H_n(\lambda - x)}{n!}\right| \leqslant \frac{K^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$$

Par conséquent, puisque $\mathrm{e}^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}} \leqslant 1$ pour tout λ de $[-a, a]$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall \lambda \in [-a, a],\ \ |g^{(n)}(x)| \leqslant \frac{K^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}.$$

Attention à bien faire ressortir l'indépendance de K vis-à-vis de n.

Ainsi, les hypothèses de I-3 sont satisfaites pour g_x.

On en deduit alors que pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $\lambda \in [-a, a]$,

$$g_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_x^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\frac{-\lambda^2+2\lambda x - x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n H_n(-x)}{n!}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\lambda^n.$$

En remarquant que, puisque H_n est de la parité de n, on a $(-1)^n H_n(-x) = H_n(x)$ et en simplifiant par $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ non nul, on obtient

$$\mathrm{e}^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\lambda^n.$$

(c) La fonction $f : x \mapsto H_n(x)\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale a deux impropretés en $+\infty$ et $-\infty$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 f(x) = \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2} + 2\ln|x|}.$$

Or, $x = o(x^2)$ et $\ln|x| = o(x^2)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, d'après les croissances comparées. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} x^2 f(x).$$

Donc, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, on a : $|f(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convegente, en utilisant le théorème de comparaison des fonctions positives par négligeabilité, l'intégrale de l'énoncé converge absolument, donc converge.

D'après la définition de H_n, on a :

$$\langle \exp, H_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(n)}(x) \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, on fait une intégration par parties, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u(x) = g^{(n-1)}(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^x.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad u'(x) = g^{(n)}(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|u(x)v(x)| = |g^{(n-1)}(x)\mathrm{e}^x| = |H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^x| \underset{+\infty}{\sim} |x|^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+x} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+x+(n-1)\ln|x|}.$$

Comme $\ln|x| = o(x^2)$ et $x = o(x^2)$, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$ on a

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0.$$

Ainsi, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et on obtient :

$$\langle \exp, H_n\rangle = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x g^{(n-1)}(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^x H_{n-1}(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \langle \exp, H_{n-1}\rangle$$

Par conséquent, par itération de cette relation, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle \exp, H_n\rangle = \langle \exp, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

Effectuons un changement de variables $y = x - 1 = \varphi(x)$. La fonction φ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$; ainsi :

$$\langle \exp, H_n\rangle = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

En évaluant l'égalité du 2(b) en $\lambda = 1$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \qquad \text{soit:} \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\mathrm{e}}\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n\rangle \,\frac{H_n(x)}{n!},$$

d'après le calcul précédent.