

Correction du Concours blanc n° 1 – Épreuve n° 2

Épreuve type EDHEC

Exercice 1 – (EDHEC 2005)

1. (a) La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (donc une forme linéaire). Ainsi, $\text{Im}(tr)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, donc est de dimension 0 ou 1. La trace étant une application non nulle (par exemple $tr I_n = n \neq 0$, on en déduit que $\text{Im } tr \neq \{0\}$, donc $\dim \text{Im } tr = 1$. Ainsi, on a une inclusion $\text{Im } tr \subset \mathbb{R}$, avec égalité des dimensions (finies), donc $\text{Im } tr = \mathbb{R}$.
- (b) D'après la formule du rang, l'espace de départ étant de dimension finie, on a :

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \text{Im } tr + \dim \text{Ker } tr, \quad \text{donc:} \quad \dim \text{Ker } tr = n^2 - 1.$$

- (c) Soit $M \in \text{Ker } tr \cap \text{Vect}(I)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I$. Alors

$$tr M = \lambda tr I = \lambda n.$$

De plus, $M \in \text{Ker } tr$, donc $\lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$ (car par hypothèse $n \geq 2$) Ainsi, $M = 0$. On a donc $\text{Ker } tr \cap \text{Vect}(I) \subset \{0\}$, et comme l'inclusion réciproque est immédiate, puisque ce sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit l'égalité :

$$\text{Ker } tr \cap \text{Vect}(I) = \{0\}$$

Ainsi, $\text{Ker } tr + \text{Vect}(I) = \text{Ker } tr \oplus \text{Vect}(I)$. On a alors

$$\dim(\text{Ker } tr \oplus \text{Vect}(I)) = \dim \text{Ker } tr + \dim \text{Vect}(I) = n^2 - 1 + 1 = n^2.$$

On a donc une inclusion $\text{Ker } tr \oplus \text{Vect}(I) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec égalité des dimensions. Ainsi, on a l'égalité

$$\text{Ker } tr \oplus \text{Vect}(I) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$f(M) = M + tr(M)I.$$

- (a) Tout d'abord, f est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Montrons que cette application est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N) + tr(\lambda M + N)I = \lambda M + N + (\lambda tr M + tr N)I,$$

par linéarité de la trace (inutile de justifier cette linéarité, elle est implicitement admise dans l'énoncé, lors de la définition de la trace) Ainsi,

$$f(\lambda M + N) = \lambda(M + tr(M)I) + N + tr(N)I = \lambda f(M) + f(N).$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (b) Soit λ une valeur propre de f , et $M \neq 0$. Alors M est dans E_λ si et seulement si $M + tr(M)I = \lambda M$, donc $(1 - \lambda)M = (tr M)I$.

Une telle égalité est possible :

- soit si M et I sont colinéaires, donc $M \in \text{Vect}(I)$. Or, pour tout $l \in \mathbb{R}$, $f(\lambda I) = (n + 1)\lambda I$, donc dans ce cas, $\lambda = n + 1$, et $\text{Vect}(I) \subset E_{n+1}$;
- soit $1 - \lambda = 0$ et $tr(M) = 0$, donc $\lambda = 1$ et $M \in \text{Ker } tr$. On vérifie facilement que pour tout $M \in \text{Ker } tr$, on a effectivement $f(M) = M$, donc, comme $\text{Ker } tr \neq \{0\}$, 1 est valeur propre de f , et $\text{Ker } tr \subset E_1$.

Ainsi, $\text{Sp}(f) = \{1, n+1\}$, et $\dim(E_1) \geq n^2 - 1$ et $\dim(E_2) \geq 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension totale n^2 (car les sous-espaces propres sont en somme directe), on en déduit que $\dim(E_1) = n^2 - 1$ et $\dim E_2 = 1$. La somme de ces dimensions étant égale à la dimension totale n^2 , f est diagonalisable.

Comme 0 n'est pas valeur propre de f , on en déduit que f est un automorphisme.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$g(M) = M + \text{tr}(M)J$$

où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont la trace est nulle.

On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} g \circ g(M) - 2g(M) + M &= g(M + \text{tr}(M)J) - 2M - 2\text{tr}(M)J + M \\ &= g(M) + \text{tr}(M)g(J) - M - 2\text{tr}(M)J \\ &= M + \text{tr}(M)J + \text{tr}(M)(J + \text{tr}(J)J) - M - 2\text{tr}(M)J = 0, \end{aligned}$$

car $\text{tr}(J) = 0$.

Ainsi, $g^2 - 2g + \text{id}$ est l'endomorphisme nul, donc $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g .

- (b) Puisque $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g , on a $\text{Sp}(g) \subset \text{rac}(X^2 - 2X + 1) = \{1\}$.

De plus, le calcul précédent montre que $g(J) = J$, donc $1 \in \text{Sp}(g)$. Ainsi, $\text{Sp}(g) = \{1\}$. Donc 1 est la seule valeur propre de g .

Attention, cet énoncé affirme l'unicité mais aussi l'existence d'une valeur propre! N'oubliez pas de montrer que 1 est effectivement valeur propre de g .

- (c) L'endomorphisme g ne possède qu'une valeur propre, égale à 1. Si g était diagonalisable, il serait donc égal à l'homothétie de rapport 1, donc à l'identité. Or

$$g(I) = I + \text{tr}(I)J = I + nJ \neq I,$$

car $J \neq 0$. Donc g n'est pas l'identité. Donc g n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 – (d'après EDHEC 2004)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale n'a qu'une impropriété, en $+\infty$.

De plus, au voisinage de $+\infty$ on a l'équivalent suivant pour h_x :

- Si $x > 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$, et comme $x+1 > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ est convergente.

Les deux fonctions étant positives sur $[1, +\infty[$, on en déduit, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives par équivalences, que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente.

- Si $x < 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente. On conclut de même, par comparaison, que l'intégrale définissant $f(x)$ est divergente.

- Si $x = 0$, alors $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t}$. On conclut de même que l'intégrale définissant $f(x)$ est divergente.

Ainsi, $f(x)$ est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $0 < x \leq y$. On a alors, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$t^{x+1} \leq t^{y+1},$$

par croissance de la fonction puissance d'un nombre supérieur à 1 (croissance de $x \mapsto e^{x \ln t}$, du fait que $\ln t \geq 0$)

Ainsi, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 < 1 + t + t^{x+1} \leq 1 + t + t^{y+1} \quad \text{donc:} \quad \frac{1}{1 + t + t^{x+1}} \geq \frac{1}{1 + t + t^{y+1}}.$$

Par la propriété de croissance de l'intégrale on en déduit que $f(x) \geq f(y)$.

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. C'est un calcul classique, consistant à faire une mise sous forme canonique :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 1 + t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Ainsi, en posant le changement de variables $u = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{\sqrt{3}} = \varphi(t)$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, croissante, et bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$, on en déduit que :

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} u - \operatorname{Arctan} \sqrt{3} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. (a) Soit $x > 0$. Alors $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale possède une seule impropreté en $+\infty$. De plus, puisque $x > 0$, $1 = o(t^x)$, d'où

$$\frac{1}{t(1+t^x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}},$$

et comme dans la question 1, on en déduit que $g(x)$ est bien définie.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} dt.$$

Attention, on ne peut pas séparer cette intégrale en deux directement sur les intégrales impropres, car les deux intégrales obtenues divergent. On restreint donc l'intervalle d'intégration. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A \frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} dt = \left[\ln t \right]_1^A - \frac{1}{x} \left[\ln(1+t^x) \right]_1^{+\infty} = \ln(A) - \frac{\ln(1+A^x)}{x} + \frac{\ln 2}{x} = \frac{1}{x} \left(\ln \frac{A^x}{1+A^x} \right) + \frac{\ln 2}{x}.$$

Ainsi, le premier terme étant de limite nulle lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$

- (c) La fonction qu'on intègre pour définir f étant positive sur l'intervalle d'intégration, on a, par la propriété de positivité de l'intégrale, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$.

De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$1 + t + t^{x+1} \geq t + t^{x+1} = t(1+t^x) \quad \text{donc:} \quad \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leq \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Par la propriété de croissance de l'intégrale, on en déduit donc que $f(x) \leq g(x) = \frac{\ln 2}{x}$.

D'après le théorème d'existence de limites par encadrement, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$, on en déduit que f admet une limite en $+\infty$, et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

5. (a) D'après la question précédente, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x)$. De plus, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} = \frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})} = \frac{1}{(1+t+t^{x+1})(t+t^{x+1})} \leq \frac{1}{t^{2x+2}}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les intégrales étant convergentes,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \right) dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x+2}} dt = \frac{1}{2x+1}.$$

On en déduit que

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}.$$

- (b) Ainsi, puisque $\frac{1}{2x+1}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+ , on en déduit que $\frac{\ln 2}{x} - f(x)$ reste borné au voisinage de 0^+ . Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2}{x} = +\infty$, on en déduit que, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = o\left(\frac{\ln 2}{x}\right) \quad \text{soit:} \quad f(x) = \frac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{\ln 2}{x}\right)$$

Ainsi, $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln 2}{x}$, et par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2}{x} = +\infty.$$

6. Je vous laisse faire.

7. (a) Soit $t \geq 1$. La fonction $x \mapsto t^{x+1} = e^{(x+1) \ln t}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, par les propriétés de sommes et quotients de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, le dénominateur ne s'annulant pas, la fonction g_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'_t(x) = -\frac{(\ln t)e^{(x+1) \ln t}}{(1+t+e^{(x+1) \ln t})^2}$$

puis

$$\begin{aligned} g''_t(x) &= -\frac{(\ln t)^2 e^{(x+1) \ln t} (1+t+t^{x+1})^2 - 2(\ln t)^2 e^{2(x+1) \ln t} (1+t+t^{x+1})}{(1+t+t^{x+1})^4} \\ &= \frac{(\ln t)^2 (t^{x+1} (1+t+t^{x+1}) - 2t^{2x+2})}{(1+t+t^{x+1})^3} = -\frac{(\ln t)^2 t^{x+1} (1+t-t^{x+1})}{(1+t+t^{x+1})^3}. \end{aligned}$$

- (b) Or, pour tout $t \geq 1$, et tout $y > 0$, $0 \leq t^{y+1} \leq 1+t+t^{y+1}$ et $0 \leq |1+t-t^{y+1}| \leq |1+t| + |t^{y+1}| = 1+t+t^{y+1}$, donc

$$|t^{y+1} (1+t-t^{y+1})| \leq (1+t+t^{y+1})^2.$$

On en déduit que pour tout $t \geq 1$ (c'est aussi vrai pour $t > 0$, comme le demande l'énoncé, mais on ne voit pas bien la raison de considérer des valeurs de t inférieures à 1), et tout y dans $\mathbb{R}_+^*$,

$$|g''_t(y)| = \frac{(\ln t)^2 t^{y+1} |1+t-t^{y+1}|}{(1+t+t^{y+1})^3} \leq \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{y+1}}.$$

Si de plus, $y \in]x-|h|, x+|h|$, on en déduit que $y \geq x-|h| \geq \frac{x}{2}$ (vu la contrainte sur h), donc, pour tout valeur de t supérieure à 1 (et là, il y a une erreur dans l'énoncé, ce n'est plus valable pour $t \leq 1$), on a

$$t^{y+1} \geq t^{\frac{x}{2}+1},$$

et donc

$$|g''_t(y)| \leq \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}$$

- (c) D'après l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 1 pour la fonction g_t de classe $\mathcal{C}^2$, entre x et $x+h$, l'expression précédente étant un majorant (indépendant de y , mais pouvant dépendre de x et h) de g''_t entre x et $x+h$, on en déduit que

$$|g_t(x+h) - g_t(x) - hg'_t(x)| \leq \frac{h^2 \ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})},$$

d'où, en divisant par $|h| \neq 0$ (hypothèse à rajouter),

$$\left| \frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right| \leq \frac{|h| \ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})}.$$

- (d) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc l'intégrale admet une unique impropreté en $+\infty$. De plus,

$$\frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}}.$$

Or, $\frac{x}{2} + 1 > 1$. Il existe donc α tel que $1 < \alpha < \frac{x}{2} + 1$. Alors pour tout $t \geq 1$,

$$t^\alpha \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}} = \frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1-\alpha}},$$

et comme $\frac{x}{2} + 1 - \alpha > 0$, d'après les croissances comparées, cette expression est de limite nulle en $+\infty$. Ainsi, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{(\ln t)^2}{t^{\frac{x}{2}+1}} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),$$

et d'après l'équivalent ci-dessus, on obtient alors :

$$\frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Les fonctions étant positives, et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ étant convergente, puisque $\alpha > 1$, on en déduit, par le critère de comparaison par négligeabilité, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} dt$ est convergente.

On a alors, d'après l'inégalité triangulaire et la majoration de la question c,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_1^{+\infty} g'_t(x) dt \right| &= \left| \int_1^{+\infty} \left(\frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right) dt \right| \\ &\leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g'_t(x) \right| dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t+t^x} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente, et ne dépend pas de h . Donc la limite de ce majorant lorsque h tend vers 0 est égale à 0 (à x fixé). Ainsi, le taux d'accroissement en x de f admet une limite lorsque x tend vers 0, d'où la dérivabilité de f en x , et

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_1^{+\infty} g'_t(x) dt.$$

Ceci est vrai pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 – (EDHEC 2002)

- (a) La fonction $t \mapsto 1 - \ln t$ est continue sur $]0, 1]$. ON a donc une seule impropreté en 0. On effectue une intégration par parties, en posant les fonctions u et v définies par :

$$\forall t \in]0, 1], \quad u(t) = 1 - \ln t \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, 1]$, et

$$\forall t \in]0, 1], \quad u'(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

D'après les théorèmes de croissances comparées, uv admet une limite nulle en 0, donc les intégrales $\int_0^1 u(t)v'(t) dt = \int_0^1 (1 - \ln t) dt$ et $\int_0^1 u'(t)v(t) dt = \int_0^1 1 dt$ sont de même nature. Cette deuxième intégrale est faussement impropre donc convergente. Ainsi, l'intégrale de l'énoncé est convergente aussi, et puisque uv admet une limite en 0, on peut faire l'intégration par parties directement sur l'intégrale impropre, et on obtient :

$$\int_0^1 (1 + \ln t) dt = \left[(1 - \ln t)t \right]_{\lim_0}^1 + \int_0^1 1 dt = 1 + 1 = 2.$$

Pour justifier la convergence, on aurait aussi pu constater que d'après les théorèmes de croissance comparée, $1 - \ln t = o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$ au voisinage de 0.

- (b) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1+\ln t}{2+t^2}$ est continue sur $]0, x]$, donc l'intégrale admet une unique impropreté en 0. De plus, au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1 + \ln t}{2 + t^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2}(1 + \ln t)$$

et les deux fonctions étant négatives au voisinage de 0^+ (donc de signe constant), la convergence de l'intégrale de la question 1(a) amène la convergence de l'intégrale de la question 1(b), par critère de comparaisons par équivalents.

2. (a) $F(x)$ est le reste en 0 d'une intégrale convergente, donc sa limite lorsque x tend vers 0, $x \neq 0$ est $0 = F(0)$. Donc F est continue en 0.
- (b) On ne peut pas dire directement que F est la primitive en 0 de $t \mapsto \frac{1-\ln t}{2+t^2}$, car l'intégrale est impropre en 0, et le théorème nous permettant d'affirmer cela est donné avec des intégrales définies. Soit donc G une primitive quelconque de $x \mapsto \frac{1-\ln x}{2+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui existe, car cette fonction est continue sur cet intervalle). Alors, la convergence en 0 de l'intégrale nous assure l'existence d'une limite finie en 0^+ pour G , et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = G(x) - \lim_{y \rightarrow 0^+} G(y).$$

Ainsi, F et G diffèrent d'une constante. Donc F est une primitive de la fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $x \mapsto \frac{1-\ln x}{2+x^2}$. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2}.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$	<pre> graph LR 0 --> Fe[F(e)] Fe --> lim[lim_{x \to +\infty} F(x)] </pre>		

3. (a) On a

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \ln t) dt = 1,$$

d'après la question 1, l'inégalité étant justifiée par le fait que sur cet intervalle, $t \mapsto 1 - \ln t$ est positive.

Ainsi, $F(1) \leq 1$. Donc, F étant croissante sur $[0, 1]$, avec $F(0) = 0$ et $F(1) \leq 1$, on en déduit que $F([0, 1]) \subset [0, 1]$. Ainsi, $[0, 1]$ est un intervalle stable par F , donc, puisque $u_0 \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura $u_n \in [0, 1]$.

- (b) En particulier, $u_1 \in [0, 1]$, donc $u_1 \leq u_0$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$.

D'après ce qui précède, $\mathcal{P}(0)$ est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Comme $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$, et comme F est croissante sur $[0, 1]$, on obtient :

$$F(u_{n+1}) \leq F(u_n) \quad \text{donc:} \quad u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

- (c) Comme elle est aussi minorée par 0, elle est convergente.
4. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $g(x) = F(x) - x$.
- (a) Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{2 + x^2} - 1 = \frac{-\ln x - 1 - x^2}{2 + x^2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad g(1) = -\frac{2}{3}.$$

De plus, g' est dérivable et

$$\forall x \in]0, 1], \quad g''(x) = \frac{-\frac{1}{x}(2 + x^2) - 2x(1 - \ln x)}{2 + x^2} = \frac{-2 + x^2 - 2x^2(1 - \ln x)}{x(2 + x^2)} = \frac{-2 - x^2 + 2x^2 \ln x}{x(2 + x^2)} < 0.$$

Ainsi, g' est strictement décroissante sur $]0, 1]$. Donc, g' étant continue, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, 1]$ dans $[-\frac{2}{3}, +\infty[$. Comme 0 est dans l'intervalle image, 0 admet un unique antécédent β dans $]0, 1]$ par g' .

On obtient donc les variations de g sur $]0, 1]$:

x	0	β	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

- (b) On a $g(1) = F(1) - 1 \leq 0$ d'après la stabilité de l'intervalle $[0, 1]$, et $g(\beta) > 0$, puisque g est strictement croissante sur $[0, \beta]$, et $g(0) = 0$. Ainsi, g étant continue sur $[\beta, 1]$, strictement décroissante, le théorème de la bijection nous donne comme précédemment l'existence d'un unique $\alpha \in]\beta, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
5. (a) On a donc $F(\alpha) = \alpha$.
 Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq \alpha$.
 On a $u_0 = 1 \geq \alpha$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors $1 \geq u_n \geq \alpha \geq 0$, et F étant croissante sur $[0, 1]$, on en déduit que $F(u_n) \geq F(\alpha)$, donc $u_{n+1} \geq \alpha$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
 Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.
- (b) La fonction F étant continue sur $[0, 1]$ fermé borné, et (u_n) étant définie par récurrence associée à F , et à valeurs dans $[0, 1]$, et convergente, on en déduit que (u_n) tend vers un point fixe de F sur $[0, 1]$. De plus, (u_n) est à valeurs dans $[\alpha, 1]$ d'après ce qui précède, donc dans $[\beta, 1]$. Donc (u_n) tend vers un point fixe de F dans $[\beta, 1]$. Or, d'après 4(b), α est le seul point fixe de F dans $[\beta, 1]$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

Problème 1 –

Partie I – Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1. (a) **Mise en garde** : Attention, les lancers sont mutuellement indépendants une fois le jeton choisi, mais pas dans l'absolu, avant choix du jeton. En effet, intuitivement, la connaissance des résultats précédents influe beaucoup sur la probabilité des lancers suivants. Par exemple, si on a obtenu beaucoup de 1 successifs, la probabilité qu'on ait tiré avec le jeton 2 est forte, donc il est très fortement probable qu'on tire encore un 1, alors que si on a tiré au moins un zéro avant, on sait qu'on a tiré avec le jeton 1, et donc que la probabilité d'obtenir un 1 n'est que de $\frac{1}{2}$. Cette dépendance vis-à-vis des résultats antérieurs montre bien que les tirages ne sont pas indépendants.

En revanche, une fois le jeton choisi, les tirages sont clairement indépendants (on est dans le schéma classique d'une succession de tirages à Pile ou Face avec une pièce donnée).

Remarquez que l'indépendance (mutuelle) d'événements est une notion liée à une probabilité, c'est-à-dire définie sur un espace probabilisé (et non seulement probabilisable). En effet, la définition de l'indépendance ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$) fait intervenir la mesure de probabilité. La remarque précédente signifie que les événements U_k sont mutuellement indépendants pour les mesures de probabilité conditionnelle P_E et $P_{\overline{E}}$, mais ne sont pas mutuellement indépendants pour la mesure de probabilité totale P .

Soit A_n l'événement consistant à n'obtenir que des faces portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Ainsi, $A_n = U_1 \cap \dots \cap U_n$.

Pour exploiter l'indépendance des tirages, il faut donc se placer au niveau des probabilités conditionnelles. Ainsi, on utilise la formule des probabilités totales sur le système complet $(E, \overline{E})$, ces deux événements étant de probabilité non nulle :

$$P(A_n) = P(E)P_E\left(\bigcap_{k=1}^n U_k\right) + P(\overline{E})P_{\overline{E}}\left(\bigcap_{k=1}^n U_k\right)$$

Les lancers étant mutuellement indépendants après choix du jeton, on obtient :

$$P(A_n) = P(E) \prod_{k=1}^n P_E(U_k) + P(\overline{E}) \prod_{k=1}^n P_{\overline{E}}(U_k).$$

Or, on a $P(E) = P(\overline{E}) = \frac{1}{2}$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_E(U_k) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{E}}(U_k) = 1$. Donc :

$$P(A_n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}.$$

(b) On a :

$$P_{A_n}(E) = \frac{P(E \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(E)P_E(A_n)}{P(A_n)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + 2^n},$$

les différents tirages étant indépendants après choix du jeton.

La limite de cette probabilité est 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si on n'obtient pendant longtemps que des 1, c'est que selon toute probabilité, on a tiré avec le jeton n'ayant que des faces 1 : si on tire avec le jeton 1, la probabilité de n'avoir que des 1 dans une succession infinie est nulle.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On discute suivant l'événement E . La loi de la variable X conditionnée à E est la loi du temps d'attente d'une face donnée, donc d'un succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, il s'agit de la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$P(X = n \mid E) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De plus, si $\overline{E}$ est réalisé, on ne tire jamais la face 0, donc :

$$P(X = n \mid \overline{E}) = 0.$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet $(E, \overline{E})$, on obtient :

$$P(X = n) = P(E)P(X = n \mid E) + P(\overline{E})P(X = n \mid \overline{E}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

- (b) L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si aucun des événements $[X = n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, n'est réalisé. Ainsi :

$$[X = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{[X = n]} = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X = n]}.$$

Par conséquent, les événements $[X = n]$, $n \in \mathbb{N}$ étant deux à deux incompatibles et en nombre dénombrable, on obtient, par complémentation et σ -additivité :

$$P(X = 0) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X = n]\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat était prévisible : il correspond à la probabilité de tirer le jeton 2 : dans ce cas, l'événement $[X = 0]$ est réalisé de manière certaine, alors qu'en cas contraire, il est presque-impossible.

Une autre façon de faire ce calcul est de constater que $[X = 0] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Il s'agit d'une intersection d'une suite décroissante d'événements, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$P(X = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{2}.$$

(c) **N'oubliez pas de justifier l'absolue convergence pour l'existence de l'espérance !!!**

La série définissant l'espérance est de terme général $n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, pour $n \geq 1$ (le terme initial ne modifie pas les propriétés de convergence) donc de terme général $\frac{1}{4} \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Il s'agit du terme général d'une série du binôme négatif, de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc **absolument** convergente. Ainsi, l'espérance existe, et :

$$E(X) = 0P(X = 0) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

C'est logique : si on tirait avec la pièce 1, on aurait en moyenne besoin de 2 coups (espérance d'une loi géométrique), mais comme on a une chance sur deux de tirer avec la pièce 2, et donc d'obtenir $X = 0$, l'espérance est divisée par 2.

Le résultat peut d'ailleurs se retrouver de cette manière presque sans calcul, en utilisant la formule de l'espérance totale : $E(X | E) = 2$ d'après l'expression de l'espérance d'une loi géométrique, et $E(X | \bar{E}) = 0$, car on ne tire dans ce cas que des 1. De plus, l'existence de ces espérances conditionnelles de X équivaut à l'existence des espérances conditionnelles de $|X|$, par définition, et comme le système complet $(E = E_1, \bar{E} = E_2)$ est fini, on a bien entendu convergence de la somme $\sum_{k=1}^2 P(E_k)E(|X| | E_k)$. Ainsi, on obtient l'existence de $E(X)$ par le théorème de l'espérance totale, et

$$E(X) = P(E)E(X | E) + P(\bar{E})E(X | \bar{E}) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1.$$

Vous remarquerez que dans un cas où les calculs sont si simples à faire, on ne gagne pas grand chose à l'utilisation de la formule de l'espérance totale : on gagne en nombre de calculs, mais on perd en temps de justification, les justifications à donner pour l'utilisation de cette formule étant un peu délicates. Il est bon de savoir appliquer cette méthode, mais elle est peut-être à réserver à des cas où les calculs sont un peu plus compliqués.

- (d) La série définissant $E(X(X-1))$ est de terme général $n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, d'après le théorème de transfert. Ainsi, à un coefficient $\frac{1}{8}$ près, on se retrouve de nouveau avec une série du binôme négatif, donc absolument convergente. Ainsi, $E(X(X-1))$ existe, et

$$E(X(X-1)) = 0 \cdot (-1)P(X = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2!}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

Ainsi, X admet une variance, et, d'après la formule de König-Huyghens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2.$$

3. (a) On fait de même que pour X , en utilisant la formule des probabilités totales, et en remarquant que :
- si E est réalisé, il s'agit à nouveau du temps d'attente d'un premier succès, donc d'une loi géométrique ;
 - sinon, l'événement $[Y = 1]$ est réalisé de manière certaine.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(E, \overline{E})$, pour tout $n \geq 1$:

$$P(Y = n) = P(E)P(Y = n | E) + P(\overline{E})P(Y = n | \overline{E}).$$

Ainsi,

- si $n = 1$, $P(Y = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$;
- si $n \geq 2$, $P(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(b) Comme pour X , on a :

$$P(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 0.$$

(c) À partir du rang $n = 2$, le terme général de la série déterminant $E(Y)$ est $n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, comme pour X . Ainsi, à nouveau, il s'agit d'une série du binôme négatif, donc absolument convergente. Ainsi, Y admet une espérance, et

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Encore une fois c'est logique : dans un cas l'espérance est 2, dans l'autre elle est 1. Comme les deux cas sont équiprobables, l'espérance finale est la moyenne des 2 donc $\frac{3}{2}$. Encore une fois, on aurait pu faire les calculs avec la formule de l'espérance totale : comme précédemment $E(Y | E) = 2$, et $E(Y | \overline{E}) = 1$, car on tire forcément le premier 1 au premier tirage dans ce cas. Ainsi, les conditions de convergence étant assurées comme précédemment par le fait que le système complet est fini, on obtient l'existence de $E(Y)$, et

$$E(Y) = P(E)E(Y | E) + P(\overline{E})E(Y | \overline{E}) = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}.$$

(d) Le terme général, à partir du rang 2, de la série calculant $E(Y(Y - 1))$ d'après le théorème de transfert est le même que celui pour $E(X(X - 1))$, ce qui nous assure de la convergence absolue de cette série, donc de l'existence de $E(Y(Y - 1))$. De plus :

$$E(Y(Y - 1)) = 1(1 - 0)\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2!}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 2.$$

On obtient alors, d'après la formule de König Huyghens, l'existence de $V(Y)$, et :

$$V(Y) = E(Y(Y - 1)) + E(Y) - E(Y)^2 = 2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}.$$

4. (a) Si X et Y sont tous les deux non nuls, S correspond au premier tirage tel que le 1 et le 0 soient apparus. Comme ils ne peuvent pas apparaître en même temps S prend des valeurs supérieures ou égales à 2.

Si $X = 0$, alors on n'a tiré que des 1, donc Y vaut 1. Ainsi, S prend la valeur 1.

De même si $Y = 0$.

Ainsi, $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- (b) D'après ce qui précède, l'événement $[S = 1]$ est réalisé si et seulement si $[X = 0]$ est réalisé ou $[Y = 0]$ est réalisé. Ainsi :

$$[S = 1] = [X = 0] \cup [Y = 0].$$

Par ailleurs, ces deux événements sont incompatibles, car on ne peut pas à la fois ne jamais tirer 0 et ne jamais tirer 1, puisque ce sont les deux seules possibilités ! Ainsi, par additivité,

$$P(S = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

(c) Soit $n \geq 2$.

- Si $[X = n]$ est réalisé, alors tous les tirages précédents ont amené un 1, en particulier le premier. Donc $[Y = 1]$ est réalisé, et en particulier $[Y < n]$ est réalisé. Ainsi, $[X = n] \subset [Y < n]$; la réciproque n'a aucune raison d'être vraie.
 - De même, on obtient $[Y = n] \subset [X < n]$.
 - Si $[S = n]$ est réalisé, alors le maximum de X et Y est n , donc soit X soit Y a pris la valeur n . Ainsi, $[X = n] \cup [Y = n]$ est réalisé. Par conséquent, $[S = n] \subset [X = n] \cup [Y = n]$.
 - Si $[X = n] \cup [Y = n]$ est réalisé, supposons que ce soit $[X = n]$ qui est réalisé. Alors d'après ce qui précède, $[Y < n]$ est réalisé, donc n est le maximum des deux valeurs prises par X et Y . Donc $[S = n]$ est réalisé. De même bien entendu si $[Y = n]$ est réalisé. Ainsi, $[X = n] \cup [Y = n] \subset [S = n]$.
 - Les deux inclusions amènent l'égalité $[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$.
- (d) Les événements $[X = n]$ et $[Y = n]$ sont incompatibles (car cela nécessiterait qu'on tire à la fois 0 et 1 au n -ième tirage). Donc pour tout $n \geq 2$,

$$P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $P(S = 1) = \frac{1}{2}$, on reconnaît l'expression d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, $E(S) = 2$ et $V(S) = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$.

5. (a) • Si X ou Y prend la valeur 0, alors I aussi.
 • Sinon, X et Y prennent toutes deux des valeurs strictement positives. L'un des deux au moins prend la valeur 1, car on tire forcément soit un 1 soit un 2 lors du premier tirage. Ainsi, I prend nécessairement la valeur 1.
 Ainsi, $I(\Omega) = \{0, 1\}$, donc I est une variable de Bernoulli.
- (b) D'après ce qui précède, l'événement $[I = 0]$ est réalisé si et seulement si $[X = 0]$ est réalisé ou $[Y = 0]$ est réalisé. Ainsi,

$$[I = 0] = [X = 0] \cup [Y = 0] = [S = 1]$$

Ainsi, $P(I = 0) = P(S = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, I suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit que :

$$E(I) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Partie II – Simulation des variables X et Y

1. (a) La variable X est le rang du lancer en cours. Initialement, X est nul (avant d'avoir tiré).
 On commence par déterminer le jeton avec lequel on joue (1 ou 2 : ce sont les valeurs possibles, prises avec équiprobabilités, par la variable jeton)
 Si on a choisi le jeton 1, on effectue des tirages successifs (c'est la boucle) : à chaque tirage, on obtient de manière équiprobable 0 ou 1 (c'est le `random(2)` dans la boucle). Si on obtient 1, on continue, si on obtient 0, on s'arrête. Comme à chaque tirage, on incrémente X , la valeur finale de X est le rang du tirage auquel on a obtenu pour la première fois un 1. Si la variable jeton a pris la valeur 2, on ne fait rien : dans ce cas, la valeur de sortie de X est la valeur initiale 0, ce qui correspond au fait que dans ce cas, on ne peut jamais tirer 0.
 Ainsi, la valeur affichée à la fin est la valeur simulée du nombre de tirages nécessaire pour obtenir le premier 0, cette valeur étant 0 si on a tiré le jeton 2.
 Vous remarquerez que le `begin ... end` dans la structure conditionnelle est inutile ici... Le concepteur du sujet se complique la vie...
- (b) Le nombre de passages dans la boucle peut ne pas être fini, si on a tiré la pièce 1, mais que néanmoins on obtient toujours des 1. Mais cette situation est presque-impossible. Donc le programme s'arrête presque-sûrement.
2. On copie le programme précédent, en remarquant que si on tire avec le jeton 2, cette fois, on est sûr d'obtenir un 1 au premier tirage, donc Y prend la valeur 1.

```
Program Edhec2005Y;
Var jeton, lancer, Y:integer;
Begin
  Randomize;
  Y:=0;
```

```
jeton:=random(2)+1;
if jeton=1 then
  repeat
    Y:=Y+1;
    lancer:= random(2);
  until
    lancer=1
else
  Y:=1;
writeln(Y);
end.
```