Correction du Devoir surveillé n° 7

Exercice 1 – Une équation aux dérivées partielles

1. Poue commencer, la fonction f est la somme ou produit de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Plus précisément :
   - $(x,y)\mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en tant que fonction polynomiale, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme $z\mapsto\sqrt{z}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par les règles de composition, $(x,y)\mapsto\sqrt{xy}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   - $(x,y)\mapsto\frac{x}{y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, le dénominateur ne s'annulant pas) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $(x,y)\mapsto\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
   - $(x,y)\mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+)^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $(x,y)\mapsto\theta(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

   Ainsi, f est constitué d'un produit et d'une somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

   Remarque : En tout début de copie, détaillez ce type d'argument pour la régularité des fonctions d'une ou plusieurs variables, surtout lorsqu'il y a des compositions (afin de bien préciser la compatibilité des intervalles de définition). Plus loin dans la copie, vous pouvez aller un peu plus vite, mais continuez à être plus soigneux en cas de composition.

   Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut considérer ses dérivées partielles secondes sur ce domaine. Ainsi, les règles de dérivations de fonctions composées permettent d'obtenir à l'issue de calculs sans difficulté si on s'y prend soigneusement :

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+y\theta'(xy),$$

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{\sqrt{xy}}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\theta''(xy).$$

   De la même façon :

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+x\theta'(xy),$$

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2\sqrt{x}}{y^3\sqrt{y}}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)+x^2\theta''(xy).$$

   Une vérification sans difficulté montre qu'on a bien :

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui vérifie l'équation différentielle.

   Pour tout (x,y), on pose $u=xy$ et $v=\frac{y}{x}$; on a alors $(u,v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. On a alors $y=\sqrt{uv}$ et $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$. Ainsi

$$f(x,y)=f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right).$$

   Ainsi, puisque pour tout $(u,v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut poser la fonction g :

$$\forall(u,v)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad g(u,v)=f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$, en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, les deux fonctions internes étant bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
Les règles de dérivation des fonctions composées amènent :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right).$$

Ainsi, en dérivant une nouvelle fois, par rapport à u cette fois :

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &= -\frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\end{aligned}$$

Un calcul rapide montre que :

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - 2u\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= \frac{u}{2v^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) - \frac{u}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \\ &= \frac{x^3}{2y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{xy}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ &= \frac{x}{2y}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right) = 0.\end{aligned}$$

3. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) + \frac{a}{t}h(t) = 0,$$

où a est un réel non nul.

(a) La fonction k est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad k'(t) = \frac{-a}{t^{a+1}} = -atk(t).$$

Donc la fonction k vérifie bien l'équation différentielle.)

(b)
- E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ (on peut aussi considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$).
- E est non vide : il contient la fonction k, ou plus simplement la fonction nulle.
- Soit h_1 et h_2 deux éléments de E, et λ un scalaire réel. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (h_1 + \lambda h_2)'(t) + \frac{a}{t}(h_1 + \lambda h_2)(t) = \left(h_1'(t) + \frac{a}{t}h_1(t)\right) + \lambda\left(h_2(t) + \frac{a}{t}h_2(t)\right) = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Ainsi, la fonction $h_1 + \lambda h_2$ est dans E

Ainsi, E est une sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel réel, stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de cet espace, donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c)
- φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- φ est une application linéaire. En effet, pour tout $(h_1, h_2) \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(h_1 + \lambda h_2) = (h_1 + \lambda h_2)(1) = h_1(1) + \lambda h_2(1) = \varphi(h_1) + \lambda\varphi(h_2).$$

- L'application φ est surjective. En effet, pour tout $\lambda in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda k) = \lambda\varphi(k) = \lambda$, où k est la fonction définie plus haut, élément de E.

- L'application φ est injective. Soit $h \in \operatorname{Ker}\varphi$.
  L'application k étant solution de l'équation, et ne s'annulant pas, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{t} = -\frac{k'(t)}{k(t)}.$$

  On peut donc remplacer dans l'équation satisfaite par h :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) - \frac{k'(t)}{k(t)} \cdot h(t) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad h'(t)k(t) - h(t)k'(t) = 0.$$

  Ainsi, la dérivée de $\frac{h}{k}$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc $\frac{h}{k}$ est constante. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda k$. En évaluant en 1, on obtient $0 = \varphi(h) = h(1) = \lambda k(1) = \lambda$, donc $\lambda = 0$, puis $h = 0$. Ainsi, $\ker\varphi = \{0\}$, puis φ est injective.

  Donc φ est une application linéaire injective et surjective, donc un isomorphisme.

(d) Par conséquent, E et $\mathbb{R}$ sont de même dimension 1. Comme $k \in E$, et $k \neq 0$, la famille (k) est une base de E. Donc

$$E = \{\lambda k,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarquez que le passage par les espaces vectoriels n'apporte pas grand chose. Ce raisonnement peut se faire directement. De plus ce type d'équations différentielles est au programme : on aurait pu vous demander de résoudre l'équation différentielle directement : d'après le cours, les solutions s'écrivent sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h(t) = K\mathrm{e}^{-G(t)},$$

où G est une primitive de $t \mapsto \frac{a}{t}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ h(t) = K\mathrm{e}^{-a\ln t} = Kt^{-a}.$$

On retrouve bien la même description de E.

4. • Soit f une solution de (1), et g la fonction en (u, v) associée. Alors pour tout v fixé, soit la fonction

$$h : u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v).$$

D'après la question 2, h vérifie :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(u) - 2uh'(u) = 0 \qquad \text{donc:} \qquad h'(u) - \frac{1}{2u}h(u) = 0.$$

En prenant $a = -\frac{1}{2}$ dans l'équation de la question 3, on en déduit donc qu'il existe $\lambda(v)$ (dépendant de v, mais pas de u), tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, h(u) = \lambda(v)\sqrt{u}, \qquad \text{donc:} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \lambda(v)\sqrt{u}.$$

Comme par hypothèse g est de classe $\mathcal{C}^1$, $(u, v) \mapsto \lambda(v)\sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et par division par la racine de u, de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction λ est de classe $\mathcal{C}^1$ en v. Elle admet donc une primitive φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Une primitivation de la formule précédente par rapport à v donne alors l'existence d'une fonction ne dépendant que de u, notée θ, telle que

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad g(u, v) = \varphi(v)\sqrt{u} + \theta(u).$$

Comme φ est une primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, g étant de classe $\mathcal{C}^1$, θ est une différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$. En revenant aux variables xy, on obtient :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x, y) = \sqrt{xy}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \theta(xy).$$

Ainsi, en notant G l'ensemble des fonctions définies sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles qu'il existe deux fonctions φ et θ définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = \sqrt{xy}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \theta(xy),$$

on obtient l'inclusion $F \subset G$

- L'inclusion réciproque $G \subset F$ résulte de la question 1.

Ainsi, $F = G$.

Exercice 2 – Polynômes de Tchebychev : un grand classique

1. **Archi-classique. À savoir faire impérativement !**

   (a) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: P_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1}, et $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$.

   Cette propriété est aussi vraie pour $n = 0$, à part l'expression du coefficient dominant. C'est pour cette raison que nous commençons la récurrence au rang 1.

   Comme $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$, les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont clairement vérifiées.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vérifié. Alors, d'après la relation $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, P_{n+2} est défini comme étant un produit et une combinaison linéaire de polynômes, donc est encore un polynôme. De plus, par hypothèse de récurrence,

   $$\deg(2XP_{n+1}) = \deg(P_{n+1}) + 1 = n+2 \qquad \text{et} \qquad \deg(P_n) = n.$$

   Comme $\deg(2XP_{n+1}) > \deg(P_n)$, on en déduit que $\deg(P_{n+2}) = \deg(2XP_{n+1}) = n+2$.

   De plus, le coefficient dominant de P_{n+2} est donc le coefficient dominant de $2XP_{n+1}$, obtenu en multipliant le coefficient dominant de P_{n+1} par 2. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, le coefficient dominant de P_{n+1} est $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

   Enfin :

   - $P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$
   - $P_{n+2}(-1) = -2P_{n+1}(-1) - P_n(-1) = -2(-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+2} - (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

   (b) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

   On a $P_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0) = \cos(0\theta)$. D'où $\mathcal{Q}(0)$.

   On a $P_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\theta)$. D'où $\mathcal{Q}(1)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ soient vérifiés. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(\theta - (n+1)\theta) + \cos(\theta + (n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ entraînent $\mathcal{Q}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. **Étude des racines de P_n et P_n'.**

   (a) Les racines dans $[-1,1]$ sont de la forme $r = \cos(\theta)$, pour une certaine valeur $\theta \in [0,\pi]$ (un intervalle sur lequel cos est une bijection sur $[-1,1]$). Ainsi,

   $$0 = P_n(r) = P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

   Nous avons donc à résoudre l'équation en θ : $\cos(n\theta) = 0$. Les solutions de cette équation sont

   $$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{soit} \qquad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n} \cdot \pi, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Ainsi les solutions dans l'intervalle $[0,\pi]$ sont :

$$\left\{\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\}.$$

Les racines de P_n dans l'intervalle $[-1,1]$ sont donc :

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \ldots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\}.$$

(Attention, cos étant décroissant sur $[0,\pi]$, elles sont rangées en ordre décroissant). Cela fournit n racines distinctes de P_n. Comme P_n est de degré n, il a au plus n racines. Ce sont donc là toutes les racines de P_n.

(b) Appelons pour simplifier $r_1 < \cdots < r_n$ les n racines (distinctes) de P_n. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, on peut appliquer le théorème de Rolle appliqué sur l'intervalle $[r_k, r_{k-1}]$, car P_n est continue sur cet intervalle, dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant, en tant que fonction polynomiale. Il existe donc $s_k \in]r_k, r_{k+1}[$ tel que $P_n'(s_k) = 0$. Cela fournit $n-1$ racines de $P_n'(s_k)$ (on a bien défini des réels s_k distincts deux à deux, puisqu'ils sont dans les intervalles *ouvert* $]r_k, r_{k+1}[$). Comme P_n' est de degré $n-1$, il admet au plus $n-1$ racines. L'ensemble $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ fournit donc toutes les racines de P_n'. Par construction, ces racines sont toutes dans $[-1,1]$, et même dans $]-1,1[$.

(c) Ainsi, les racines de P_n' sont de la forme $s_k = \cos(\theta_k)$, avec $\theta_k \in [0,\pi]$, et même $\theta_k \in]0,\pi[$. De plus, soit $f_n(\theta) = P_n(\cos(\theta))$. Alors

$$f_n'(\theta) = -\sin(\theta) P_n'(\cos(\theta)).$$

Comme $\sin(\theta)$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, on en déduit que pour $\theta \in]0,\pi[$, θ est racine de f_n' si et seulement si $\cos(\theta)$ est racine de P_n'. Par conséquent, pour trouver les racines (sous la forme $\cos(\theta)$) de P_n', il suffit de trouver les racines de f_n'. Or, la question 1c donne une autre expression de f_n :

$$f_n(\theta) = \cos(n\theta), \qquad \text{d'où} \qquad f_n'(\theta) = -n\sin(n\theta).$$

Ainsi, les racines de f_n' sont (si $n \neq 0$) :

$$\left\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

Par conséquent, les racines de P_n' sont (également rangées en ordre décroissant) :

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}$$

On savait déjà qu'on obtient ainsi toutes les racines de P_n'. Une petite vérification ne fait toutefois jamais de mal : on a bien $n-1$ racines, et elles sont bien réparties entre les racines de P_n.

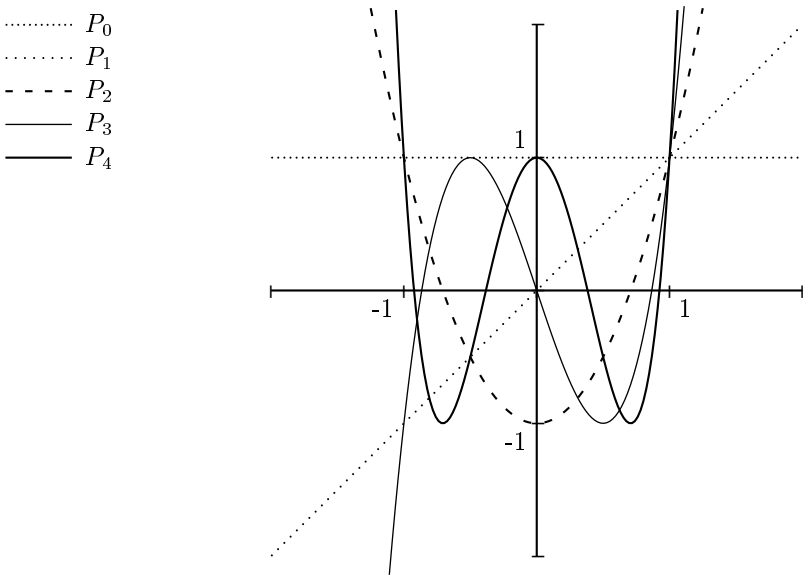
Remarque : Ce raisonnement est faux pour $n = 0$, d'ailleurs, le résultat lui-même est faux : dans ce cas, $P_0' = 0$ donc tout élément de $\mathbb{R}$ est racine de P_0'.

(d) Les extremas de P_n sont obtenus aux valeurs annulant la dérivée P_n', c'est-à-dire aux points $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Or, pour une telle valeur de k, d'après la question 1(b) :

$$P_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Attention, comme les racines de P_n' étaient rangées en ordre décroissant, le premier extremum rencontré est $(-1)^{n-1}$ et non $(-1)^{-1}$. Ainsi, P_n décroît de $+\infty$ à -1 (si n est pair) ou croît de $-\infty$ à 1 (si n est impair), puis oscille entre -1 et 1 ; le dernier extremum rencontré est -1 (quelque soit la parité de n), et P_n croît à partir de là jusqu'à $+\infty$.

(e) Je me dispense des tableaux de variation. La description ci-dessus est suffisante.



3. (a) Q est continue sur $[-1,1]$, car c'est une fonction polynomiale. Ainsi, $|Q|$ est continue sur un intervalle fermé borné : $|Q|$ est donc borné sur cet intervalle, et y atteint ses bornes. En d'autre terme, Q admet un minimum et un maximum sur $[-1,1]$. D'où l'existence de $M(Q) = \max_{|x|\leqslant 1} |Q(x)|$.

   (b) i. $Q_n(1) = P_n(1) - 2^{n-1}Q(1) = 1 - 2^{n-1}Q(1) > 0$, car $Q(1) \leqslant M(Q) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   ii. $Q_n(-1) = P_n(-1) - 2^{n-1}Q(-1) = (-1)^n - 2^{n-1}Q(-1)$. Ainsi, $Q_n(-1) > 0$ si n est pair, et $Q_n(-1) < 0$ si n est impair. La raison : $|Q(-1)| \leqslant M(Q) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   iii. De même, aux extréma s_k, $k \in \{1,\dots,k-1\}$:

$$Q_n(s_k) = P_n(s_k) - 2^{n-1}Q(s_k) = (-1)^k - 2^{n-1}Q(s_k) \begin{cases} > 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ < 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

   (c) Notons $s_0 = 1$ et $s_n = -1$. Alors, on a $n+1$ réels tels que :

$$s_0 > s_1 > \ldots > s_{n-1} > s_n \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f(s_k) > 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ f(s_k) < 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

   Q_n étant continue (fonction polynomiale), on peut appliquer le TVI sur chacun des intervalles $[s_{k-1}, s_k]$, pour $k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi, il existe des réels $c_1,\dots,c_n$ vérifiant :

$$s_0 > c_1 > s_1 > c_2 > \ldots c_{n-1} > s_{n-1} > c_n > s_n \qquad \text{et} \qquad Q_n(c_1) = \cdots = Q_n(c_n) = 0.$$

   Ainsi, Q_n possède au moins n racines distinctes. Mais, Q_n étant une différence de polynômes de degré n, son degré est au plus n, et son coefficient de degré n est $2^{n-1} - 2^{n-1} \cdot 1 = 0$ (car le coefficient de degré n de P_n est 2^{n-1} et celui de Q est 1 puisqu'il est unitaire). Par conséquent, le degré d de Q_n est strictement plus petit que n. De plus, Q_n n'est pas le polynôme nul, car $Q_n(1) > 0$. Ainsi, Q_n admet au plus d racines, ce qui rentre en contradiction avec le fait d'avoir trouvé n racines distinctes. Conclusion : l'hypothèse de départ est fausse, et par conséquent, $M(Q) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4. **Polynômes de Tchebychev et interpolation de Lagrange**.

   (a) Erratum : lire : "de degré $n-1$"
   Le polynôme P_f décrit dans l'énoncé est bien un polynôme de degré au plus $n-1$, et vérifie, pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$:

$$P_f(x_\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \prod_{i\neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_k - x_i} = f(x_\ell) \cdot \prod_{i\neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_\ell - x_i} = f(x_\ell).$$

En effet, si $k \neq \ell$, le terme indexé par $i = \ell$ dans le produit annule $x_\ell - x_i$, ainsi $\prod_{i \neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_k - x_i} = 0$. Le seul terme non nul dans dans somme correspond donc à l'indice $k = \ell$. Par conséquent, ce polynôme répond au problème, d'où l'existence de P_f.

Supposons que Q soit un autre polynôme de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(x_\ell) = f(x_\ell)$. Alors le polynôme $P_f - Q$ est de degré au plus $n-1$ et s'annule en tous les points x_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc a au moins n racines. Comme il a plus de racine que son degré, il s'agit du polynôme nul, et donc $Q = P_f$. Cela démontre l'unicité.

Raisonnement classique, à savoir refaire.

(b) i. $F_x(x) = e_x P_n(x) - e_x P_n(x) = 0$.

ii. $F_x(x_k) = e_{x_k} P_n(x) - e_x P_n(x_k) = 0$, car :
- $f(x_k) = P_f(x_k)$ par définition de P_f, donc $e_{x_k} = 0$;
- $P_n(x_k) = 0$ puisque x_k est une racine de P_n.

(c) F_x est un fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque de classe $\mathcal{C}^n$ (on suppose $n \geqslant 1$). On peut donc appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles définis par les réels (x_k) et x. Ces $n+1$ réels sont deux à deux distincts, et définissent donc n intervalles en considérant deux réels consécutifs parmis ces $n+1$ réels. F_x est dérivable sur chaun de ces intervalles (fermés), et s'annule aux extrémités. D'après le théorème de Rolle, il existe donc une racine de F_x' dans chaque intervalle (ouvert). On obtient ainsi n racines distinctes de F_x', toutes comprises entre -1 et 1.

En recommençant ainsi, on obtient $n-1$ racines distinctes de F_x'' dans $[-1,1]$ etc.. Au final, on obtient 2 racines distinctes de $F_x^{(n-1)}$ dans $[-1,1]$, et une dernière application du théorème de Rolle entre ces racines (possible car F_x est de classe $\mathcal{C}^n$, donc $F_x^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et même de derivée continue, mais ça, c'est inutile) donne l'existence de $\alpha \in [-1,1]$ (et même $\alpha \in]-1,1[$) tel que $F_x^{(n)}(\alpha) = 0$.

(d) On a $F_x^{(n)}(t) = e_t^{(n)} P_n(x) - e_x P_n^{(n)}(t)$ (dérivation par rapport à t). Or :

i. $e_t = f(t) - P_f(t)$, donc $e_t^{(n)} = f^{(n)}(t) - P_f^{(n)}(t)$. Comme P_f est de degré $n-1$, $P_f^{(n)}(t) = 0$. Par conséquent, $e_t^{(n)} = f^{(n)}(t)$.

ii. P_n est de degré n. Ainsi, $P_n^{(n)}$ est une constante, obtenue en derivant n fois le monôme de plus haut degré de P_n, c'est-à-dire $2^{n-1}X^n$. Ainsi, $P_n^{(n)} = 2^{n-1}n!$.

Ainsi, $F_x^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)P_n(x) - e_x 2^{n-1}n!$. En spécialisant à la valeur α trouvée dans la question précédente, on obtient :

$$0 = f^{(n)}(\alpha)P_n(x) - e_x 2^{n-1}n!, \qquad \text{soit :} \qquad e_x = \frac{P_n(x)}{2^{n-1}n!} \cdot f^{(n)}(\alpha).$$

(e) Pour tout $x \in [-1,1]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$. De plus, f étant de classe $\mathcal{C}^n$, $f^{(n)}$ est continue sur $[-1,1]$, donc bornée : il existe M tel que $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$ sur $[-1,1]$. Alors, $|f^{(n)}(\alpha)| \leqslant M$. Par conséquent, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$e_x \leqslant \frac{M}{2^{n-1}n!}.$$

Il s'agit d'une bonne approximation !

Remarque : Attention à la majoration de $f^{(n)}(\alpha)$; on ne peut pas prendre directement $M = f^{(n)}(\alpha)$ car α dépend de x. C'est pour cela que nous devons majorer $f^{(n)}$ sur $[-1,1]$, afin d'obtenir une majoration indépendante de x.