

Concours blanc n° 2 – Épreuve n° 2
ESSEC 2005 Math II

Problème –
Préliminaires

1. Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m . Si les X_i , $i \in n \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes, et si les X_i admettent aussi une variance σ^2 , alors la moyenne $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m , donc, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right) = 0$$

2. L'énoncé est très mal tourné, car il ne précise pas qu'on se place dans les conditions de la question précédente (indépendance des X_i et existence de la variance). Pourtant, sans cette hypothèse, on ne voit pas trop comment conclure. Supposons donc qu'on est dans ce cas. Alors

$$\left[\frac{S_n}{n} \in A \right] \subset \left[\frac{S_n}{n} \notin]m - \delta, m + \delta[\right] = \left[\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right].$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq P \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) \leq P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right).$$

Or, d'après la question 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right) = 0$, donc, d'après la théorème d'encadrement (qui donne aussi l'existence de cette limite)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = 0.$$

Partie I – Un premier exemple. Le cas gaussien

1. La variable $\frac{S_n}{n}$ est une combinaison linéaire de variables gaussiennes, donc est encore une variable gaussienne, par stabilité par somme et par transformation affine des lois normales. De plus, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$$

et, par indépendance des variables X_i ,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n}.$$

Donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{n} \right)$

2. (a) Soit F la fonction de répartition de $\frac{S_n}{n}$. Comme la variable $\frac{S_n}{n}$ est symétrique (elle admet une densité paire), on a les mêmes relations que pour la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) = 1 - F(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) &= 1 - P\left(-\delta < \frac{S_n}{n} < \delta\right) = 1 - F(\delta) + F(-\delta) = 1 - F(\delta) + 1 - F(\delta) \\ &= 2(1 - F(\delta)) = 2P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right). \end{aligned}$$

Or, d'après l'expression des densités des lois normales, on en déduit :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{n}}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt.$$

- (b) La changement de variables $u = n(t - \delta) = \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $[\delta, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, et croissante. On a $du = n dt$, et $t = \frac{u}{n} + \delta$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) &= \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt \\ &= \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{n\left(\frac{u}{n} + \delta\right)^2}{2}\right) \frac{du}{n} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta - \frac{n\delta^2}{2}\right) du \\ &= \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \times \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du. \end{aligned}$$

Visiblement, l'énoncé comporte une erreur (le $\sqrt{n}$ mal placé). Cette erreur est de mon fait (erreur de copie), désolé.

3. (a) Pour tout $x \geq 0$, $\exp(-x) \leq \exp(0) = 1$, d'où la première inégalité

De plus, la dérivée seconde de $x \mapsto \exp(-x)$ est elle-même, et est positive, donc cette fonction est convexe, donc au dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 - x$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $\exp(-x) \geq 1 - x$, d'où $1 - \exp(-x) \leq x$.

- (b) La fonction $u \mapsto \exp(-u\delta)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale ne possède qu'une impropriété en $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\int_0^A \exp(-u\delta) du = -\frac{1}{\delta} \left[\exp(-u\delta) \right]_0^A = -\frac{1}{\delta} (\exp(-A\delta) - 1).$$

Comme $\delta > 0$, on obtient $\lim_{A \rightarrow +\infty} \exp(-A\delta) = 0$. Ainsi, l'intégrale converge en $+\infty$, et

$$\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du = \frac{1}{\delta}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du - \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du = \int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) \left(1 - \exp\left(-\frac{u^2}{2n}\right)\right) du$$

Or, soit $g : u \mapsto u^2 \exp(-u\delta)$. Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, donc $\int_0^{+\infty} g(u) du$ admet une impropriété en $+\infty$. De plus, g est positive, et $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 g(u) = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre 2 en $+\infty$, donc convergente, $\int_0^{+\infty} g(u) du$ est convergente.

De l'encadrement de la question 3(a), on déduit que :

$$\forall u \geq 0, \quad 0 \leq \exp(-u\delta) \left(1 - \exp\left(-\frac{u^2}{2n}\right) \right) \leq \frac{1}{2n} u^2 \exp(-u\delta).$$

Comme les trois termes sont intégrables d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ d'après l'argument qui précède, on en déduit l'encadrement suivant :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) \left(1 - \exp\left(-\frac{u^2}{2n}\right) \right) du \leq \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} u^2 \exp(-u\delta) du.$$

Or, l'intégrale de droite étant convergente et ne dépendant pas de n , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} u^2 \exp(-u\delta) du = 0,$$

donc, d'après le théorème l'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) \left(1 - \exp\left(-\frac{u^2}{2n}\right) \right) du = 0,$$

et par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du - \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du \right) = 0.$$

(d) De la question précédente, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du = \int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du = \frac{1}{\delta}.$$

Ainsi, d'après la question 2(b) (rectifiée),

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right).$$

Partie II – Quelques résultats généraux.

1. Soit $n \geq 1$, et s tel que $\varphi\left(\frac{s}{n}\right)$ existe. Puisque $\varphi\left(\frac{s}{n}\right)$ existe, $e^{\frac{s}{n}X}$ admet une espérance. On peut donc écrire, puisque les X_i ont tous même loi que X ,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi\left(\frac{s}{n}\right) = E\left(e^{s \cdot \frac{X_i}{n}}\right)$$

et par conséquent, en faisant le produit sur toutes les valeurs de $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = \prod_{i=1}^n E\left(e^{s \cdot \frac{X_i}{n}}\right).$$

Comme les X_i sont indépendantes, il en est de même des $e^{s \cdot \frac{X_i}{n}}$. Ainsi, en appliquant itérativement l'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour X et Y indépendante (égalité donnant aussi l'existence de $E(XY)$), on obtient l'existence de l'espérance de

$$\prod_{i=1}^n e^{s \cdot \frac{X_i}{n}} = e^{\frac{s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i} = e^{s \cdot \frac{S_n}{n}},$$

et de plus,

$$E(e^{s \cdot \frac{S_n}{n}}) = \prod_{i=1}^n E(e^{s \cdot \frac{X_i}{n}}) = \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

2. (a) Question sans difficulté si on a bien compris les notations.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $A = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \geq a\}$.

- Soit $\omega \in A$. Alors $Y(\omega) \geq a$, donc $Y(\omega) - a \geq 0$, et comme $s > 0$,

$$e^{s(Y(\omega)-a)} \geq 1 = \mathbf{1}_{(Y \geq a)}(\omega).$$

- Soit $\omega \notin A$, alors

$$e^{s(Y(\omega)-a)} \geq 0 = \mathbf{1}_{(Y \geq a)}(\omega).$$

Donc dans tous les cas, on a l'inégalité. Ainsi, $\mathbf{1}_{(Y \geq a)} \leq e^{s(Y-a)}$.

- (b) La fonction $Z = \mathbf{1}_{(Y \geq a)}$ est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Il s'agit donc d'une variable de Bernoulli, de paramètre $P(Z = 1) = P(Y \geq a)$. Ainsi,

$$E(\mathbf{1}_{(Y \geq a)}) = P(Y \geq a).$$

L'inégalité de la question précédente et la croissance de l'espérance donne donc

$$P(Y \geq a) \leq E(e^{s(Y-a)}) = e^{-sa} E(e^{sY}).$$

- (c) On applique ce résultat à $Y = \frac{S_n}{n}$, ce qu'on peut faire puisque d'après la question II-1, $E\left(e^{s \cdot \frac{S_n}{n}}\right)$ existe. Alors :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} E\left(e^{s \cdot \frac{S_n}{n}}\right) = e^{-as} \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,$$

d'après la question II-1.

3. Globalement le même principe que la question 3.

- (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, et $B = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq a\}$. Alors :

- Soit $\omega \in B$. Alors $Y(\omega) - a \leq 0$, et donc $s(Y(\omega) - a) \geq 0$, donc

$$e^{s(Y(\omega)-a)} \geq 1 = \mathbf{1}_{(Y \leq a)}.$$

- Soit $\omega \notin B$. Alors

$$e^{s(Y(\omega)-a)} \geq 0 = \mathbf{1}_{(Y \leq a)}.$$

Ainsi, $e^{s(Y-a)} \geq \mathbf{1}_{(Y \leq a)}$.

- (b) Comme dans la question 3, $\mathbf{1}_{(Y \leq a)}$ est une variable de Bernoulli de paramètre $P(Y \leq a)$, donc en passant à l'espérance dans l'inégalité ci-dessus,

$$P(Y \leq a) = E(\mathbf{1}_{(Y \leq a)}) \leq E(e^{s(Y-a)}) = e^{-sa} E(e^{sY}).$$

- (c) Comme précédemment, on peut appliquer ce résultat à $Y = \frac{S_n}{n}$, et il vient immédiatement

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-as} \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

Partie III – Un second exemple. Le cas binomial.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors e^{sX} est une variable aléatoire prenant uniquement deux valeurs, e^s et 1 (une seule valeur si $s = 0$). Ainsi, le nombre de valeurs étant fini, l'espérance de e^{sX} existe. Donc φ est définie sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = E(e^{sX}) = P(X = 0) \cdot 1 + P(X = 1) \cdot e^s = q + pe^s.$$

2. On suppose dans cette question que $a > p$.

- (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque $q > 0$. Donc, le logarithme étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ℓ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que composée et différence de fonctions dérivables, et

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \ell'_a(s) = a - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = a - \frac{pe^s}{q + pe^s} = \frac{aq + p(a-1)e^s}{q + pe^s}.$$

Comme $q + pe^s$ est positif, le signe de $\ell'_a(s)$ est celui de $aq + p(a-1)e^s$. Ce signe est positif si et seulement si

$$e^s \leq \frac{aq}{(1-a)p},$$

puisque $1-a > 0$ (du fait de l'hypothèse $a < 1$). Ainsi, le terme de droite étant strictement positif, $\ell'_a(s)$ est positif si et seulement si

$$s \leq \ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right).$$

De plus,

- $\varphi(0) = p + q = 1$, donc $\ell_a(0) = 0$;
- $\varphi \left(\ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) \right) = q + \frac{aq}{1-a} = \frac{q}{1-a}$, donc

$$\ell_a \left(\ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) \right) = a \ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) - \ln \frac{q}{1-a} = h(a, p)$$

- Pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$as - \ln(\varphi(s)) = \ln(e^{as}) - \ln(\varphi(s)) = \ln \frac{e^{as}}{q + pe^s} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{as}}{pe^s} = \frac{1}{pe^{(1-a)s}}.$$

Comme $a < 1$, la limite de cette expression est nulle, donc en passant au logarithme,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \ell_a(s) = -\infty.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	$\ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right)$	$+\infty$
$\ell'_a(x)$	+	0	-
$\ell_a(x)$	0	$h(a, p)$	$-\infty$

- (b) Le tableau de variations de la question précédente montre que ℓ_a admet un maximum $h(a, p)$ en $\ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right)$

L'étude précédente du signe de ℓ'_a montre que ℓ'_a est strictement positive sur $\left] 0, \ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) \right[$, donc ℓ_a est strictement croissante sur $\left[0, \ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) \right]$. Donc

$$h(a, p) = \ell_a \left(\ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) \right) > \ell_a(0) = 0.$$

Donc le maximum $h(a, p)$ est strictement positif.

D'après la question précédente,

$$h(a, p) = a \ln \left(\frac{aq}{(1-a)p} \right) - \ln \frac{q}{1-a} = (a-1) \ln \frac{q}{1-a} + a \ln \frac{a}{p} = a \ln \frac{a}{p} + (1-a) \ln \frac{1-a}{1-p}.$$

(c) D'après la question II-2(c), pour tout $s > 0$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = e^{-n\left(a\frac{s}{n} - \ln \varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)} = e^{-n\ell_a\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

En appliquant ceci à $s = nt_0 > 0$, où t_0 est le point en lequel ℓ_a atteint son sup (qui est en fait un max d'après l'étude précédente), on obtient :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \sup_{t \geq 0} \ell_a(t)} = e^{-nh(a,p)},$$

par définition de $h(a, p)$.

3. On suppose dans cette question que $a < p$ (donc $1 - a > 1 - p$).

(a) La variable S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, en tant que somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p . Ainsi, $S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc $n - S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(n - S_n = k) = P(S_n = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

Donc $n - S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$.

On aurait aussi pu remarquer que $n - S_n$ compte les échecs, plus précisément, S_n est la somme des n variables mutuellement indépendantes $1 - X_i$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, qui suivent des lois de Bernoulli de paramètre $1 - p = q$.

(b) On a $1 - a > q$, donc en appliquant le résultat de la question 2 à la variable $n - S_n$, somme des variables de Bernoulli $1 - X_i$, de paramètre $1 - p$, on obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left(\frac{n - S_n}{n} \geq 1 - a\right) \leq e^{-nh(1-a, 1-p)}.$$

Or, l'expression trouvée en III-2(b) pour $h(a, p)$ amène immédiatement $h(1-a, 1-p) = h(a, p)$, donc

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(a,p)}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On a donc

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \\ &\leq e^{-nh(p+\varepsilon, p)} + e^{-nh(p-\varepsilon, p)} \\ &\leq 2e^{-n \min(h(p+\varepsilon, p), h(p-\varepsilon, p))}, \end{aligned}$$

d'après les questions 2(b) et 3(c), et par croissance de l'exponentielle.

5. Question qui tombe un peu comme un cheveu sur la soupe, et qui n'a pas grand chose à voir avec le reste... Du reste, une pure question de cours !

(a) p prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$, donc dans l'intervalle $[0, 1]$. De plus, S_n est la somme de n variables prenant des valeurs 0 ou 1, donc $0 \leq S_n \leq n$, donc $F_n = \frac{S_n}{n}$ prend ses valeurs dans $[0, 1]$ aussi.

De plus F_n s'écrit comme une fonction sur l'échantillon *i.i.d* $(X_1, \dots, X_n)$, de loi parente $\mathcal{B}(1, p)$. Donc il s'agit d'un estimateur de p .

L'espérance de F_n existe, car c'est une combinaison linéaire de variables admettant des espérances, et, par linéarité de l'espérance,

$$E(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p.$$

Ainsi, le biais de F_n est $b_{F_n}(p) = 0$. Donc F_n est un estimateur sans biais de p .

(b) Le risque quadratique est la somme de la variance et du carré du biais :

$$r_n = V(F_n) + b_{F_n}(p) = V(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{p(1-p)}{n},$$

du fait de l'indépendance mutuelle des X_i .

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable centrée réduite associée à F_n est :

$$S_n^* = F_n^* = \frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} = \sqrt{n} \cdot \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

D'après le théorème de la limite centrée, les X_i étant mutuellement indépendants, cette suite de variables aléatoires converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(b) On a :

$$\Phi(-t_\alpha) = 1 - \Phi(t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, $\Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 1 - \alpha$.

La question n'ayant pas de sens si $\alpha \geq 1$, on suppose $\alpha < 1$. Dans ce cas, $1 - \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2}$, donc $t_\alpha > 0$, et $-t_\alpha < 0$. Ainsi, en approximant la loi de F_n^* par la loi normale centrée réduite, du fait de la question précédente, on obtient :

$$1 - \alpha = P(-t_\alpha \leq F_n^* \leq t_\alpha) = P\left(|F_n - p| \leq t_\alpha \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right).$$

Cet intervalle n'est pas acceptable, car il dépend encore de p , le paramètre inconnu. On utilise donc une majoration classique : $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$, qui nous donne une inclusion d'événements

$$\left[|F_n - p| \leq t_\alpha \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[|F_n - p| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right].$$

Ainsi, on obtient l'inégalité

$$P\left(F_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right) = P\left(|F_n - p| \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right) \geq P\left(|F_n - p| \leq t_\alpha \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Ainsi, $\left[f_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, f_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance (au moins) $1 - \alpha$ de p .

Partie IV – Le cas général

1. Soit $t \in]\alpha, \beta[$, et $\delta > 0$ tel que $]t - \delta, t + \delta[\subset]\alpha, \beta[$.

(a) Soit $u \in \mathbb{R}$. D'après les résultats sur les séries exponentielles,

$$e^{\delta u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n u^n}{n!} \quad \text{donc:} \quad e^{\delta u} - 1 - \delta u = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n u^n}{n!} \quad \text{donc:} \quad |e^{\delta u} - 1 - \delta u| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n u^n}{n!} \right|.$$

Or, pour tout $N \geq 2$, d'après l'inégalité triangulaire sur les sommes finies,

$$\left| \sum_{n=2}^N \frac{\delta^n u^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^N \frac{\delta^n |u|^n}{n!},$$

d'où, en passant à la limite, du fait de la convergence des séries (séries exponentielles), et de la continuité de la valeur absolue (pour le terme de gauche), on obtient

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n u^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u^n|}{n!}.$$

Ainsi

$$|e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u^n|}{n!}.$$

(b) On a, pour tout réel u :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u^n|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n |u^n|}{n!} = e^{\delta |u|} \leq e^{-\delta u} + e^{\delta u},$$

puisque dans ce majorant, un des deux termes est égal à $e^{\delta |u|}$. Ainsi, en multipliant par $f(t)e^{tu}$ qui est positif (puisque f est une densité), et en utilisant la majoration de la question 1(a),

$$e^{tu} |e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq e^{tu} (e^{-\delta u} + e^{\delta u}) f(u) = (e^{(t-\delta)u} + e^{(t+\delta)u}) f(u).$$

(c) Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, tel que $]t - \delta, t + \delta[\subset]\alpha, \beta[$, et quitte à prendre $\delta' = \frac{\delta}{2}$, on peut choisir en fait δ tel que $[t - \delta, t + \delta] \subset]\alpha, \beta[$. Remarquez qu'un tel δ existe quel que soit le choix de t , puisque $] \alpha, \beta [$ est un ouvert.

Alors L_X est défini en $t - \delta$ et en $t + \delta$. Autrement dit, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t-\delta)u} f(u) \, du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(t+\delta)u} f(u) \, du$$

convergent, donc aussi l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{(t-\delta)u} + e^{(t+\delta)u}) f(u) \, du.$$

Alors, d'après le théorème de comparaison par inégalité des intégrales de fonctions positives, et d'après la question 1(b), l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} (e^{\delta u} - 1 - \delta u) f(u) \, du$$

converge absolument, donc converge. De plus, les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{\delta u} f(u) \, du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) \, du$$

étant convergentes (car $t + \delta$ et t sont dans $] \alpha, \beta [$), on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta u e^{tu} f(u) \, du$ converge, et comme $\delta \neq 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) \, du$ converge.

En particulier, pour $t = 0$, qui est dans $] \alpha, \beta [$ par hypothèse, on obtient la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) \, du$, donc l'existence de l'espérance de X .

2. Soit $t \in] \alpha, \beta [$, et $\delta > 0$ tel que $]t - \delta, t + \delta[\subset] \alpha, \beta [$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \delta$.

(a) Tout d'abord, remarquons que l'énoncé oublie de supposer que $h \neq 0$ (sans quoi l'énoncé n'a pas de sens). Plaçons-nous sous cette hypothèse.

D'après l'inégalité triangulaire, et par convergence de toutes les séries, pour tout u réel,

$$|e^{hu} - 1 - hu| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^n}{u^n} n! \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^n |u|^n}{n!} = |h|^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^{n-2} |u|^n}{n!} \leq |h|^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!}.$$

En multipliant cette inégalité par $e^{tu} f(u)$ positif, et en la divisant par $|h| \neq 0$, il vient :

$$\left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - u \cdot e^{tu} \right| f(u) \leq |h| \cdot e^{tu} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^{n-2} |u|^n}{n!} f(u).$$

Multiplions encore cette inégalité par $\delta^2 > 0$:

$$\delta^2 \left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - u \cdot e^{tu} \right| f(u) \leq |h| \cdot e^{tu} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!} f(u) \leq |h| \cdot e^{tu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!} f(u) = |h| \cdot e^{tu} e^{\delta|u|} f(u).$$

- (b) Comme précédemment, on peut supposer que $t - \delta \in]\alpha, \beta[$, et $t + \delta \in]\alpha, \beta[$. Alors $t + |\delta| \in]\alpha, \beta[$, et par conséquent, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{|\delta|u} f(u) du$ converge. Alors, on peut aussi intégrer le membre de gauche de l'inégalité précédente, avec ou sans valeur absolue,

$$\begin{aligned} \delta^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - u \cdot e^{tu} \right) f(u) du \right| &\leq \delta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - u \cdot e^{tu} \right| f(u) du \\ &\leq |h| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{|\delta|u} f(u) du. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les intégrales étant convergentes car $t \in]\alpha, \beta[$, $t + h \in]\alpha, \beta[$ et d'après la question 1(c), on obtient :

$$\left| \frac{L_X(t+h) - L_X(t)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du \right| \leq |h| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{|\delta|u} f(u) du.$$

Le membre de droite converge vers 0 lorsque h tend vers 0, donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_X(t+h) - L_X(t)}{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du.$$

Ainsi, L_X est dérivable en t et

$$L'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du.$$

3. On note $\psi(t) = \ln(L_X(t))$.

- (a) La fonction L_X est définie sur $]\alpha, \beta[$. De plus, elle est positive, en tant qu'intégrale de fonction positive. De plus, étant donné $t \in]\alpha, \beta[$, puisque

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{+\infty} f(u) du = 1,$$

il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_A^{+\infty} f(u) du \geq \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\int_A^{+\infty} e^{tu} f(u) du \geq e^{tA} \int_A^{+\infty} f(u) du \geq \frac{e^{tA}}{2}.$$

Donc L_X est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$, donc $\ln L_X$ est bien définie sur $]\alpha, \beta[$. Donc le domaine de définition de ψ est $]\alpha, \beta[$.

- (b) Comme L_X est deux fois dérivable d'après la question 2, il en est de même de ψ , par composition de fonctions deux fois dérivables, et, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$:

$$\bullet \psi'(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du};$$

$$\bullet \psi''(t) = \frac{L''_X(t)L_X(t) - (L'_X(t))^2}{L_X(t)^2} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{tu} f(u) du\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du\right) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du\right)^2}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du\right)^2}$$

- (c) • Tout d'abord, cette intégrale est bien convergente, car, si $\delta > 0$ est choisi de sorte que $[t - \delta, t + \delta] \subset]\alpha, \beta[$, au voisinage de $+\infty$, $g(t)h(t) = o(e^{t\delta})$, et la convergence de $\int e^{t\delta} e^{tu} f(u) du$ assure alors la convergence absolue en $+\infty$ de l'intégrale définissant $\langle g, h \rangle$. De même en $-\infty$ avec $e^{-\delta t}$.
- La symétrie et la bilinéarité sont évidentes (inutile de préciser davantage à ce stade de la copie), ainsi que la positivité.
- Soit g polynomiale telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)^2 e^{tu} f(u) du = 0$. Attention, f n'est pas forcément continue, mais seulement presque partout continue. On ne peut donc pas utiliser le raisonnement habituel. Soit $x_1, \dots, x_k$ les points de discontinuité de f , indexés de sorte que $x_1 < \dots < x_k$. Posons $x_0 = -\infty$ et $x_{k+1} = +\infty$. On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)^2 e^{tu} f(u) du = \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(u)^2 e^{tu} f(u) du.$$

Or, chacune des intégrales de cette somme est positive, donc, pour que la somme puisse être nulle, il faut que chacune de ces intégrales soit nulle.

De plus, on a aussi

$$\sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1,$$

donc il existe i tel que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u) du \neq 0$, donc tel que f ne soit pas nulle sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Or, sur $[x_i, x_{i+1}]$, $u \mapsto g(u)^2 e^{tu} f(u)$ est positive et continue, donc est nulle, puisque son intégrale est nulle. Comme f n'est pas nulle sur cet intervalle, et continue, il existe un intervalle $]a, b[\subset]x_i, x_{i+1}[$ sur lequel f ne s'annule pas. Par conséquent, g est identiquement nulle sur $]a, b[$. Ainsi, la fonction polynomiale g admet une infinité de racines, donc est nulle. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Il s'agit donc d'un produit scalaire. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{tu} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du = \|X\|^2 \|1\|^2 \geq \langle X, 1 \rangle^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du \right)^2.$$

De plus, les polynômes 1 et X n'étant pas colinéaires, cette inégalité est stricte. Ainsi, ψ'' est strictement positive sur $] \alpha, \beta[$, donc ψ' est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$.

Une fonction croissante admet des limites (finies ou infinies) à gauche et à droite en tous points, donc ψ' admet une limite (à droite) $L_1(\alpha)$ en α et une limite (à gauche) $L_1(\beta)$ en β .

De plus, $\psi'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) du = E(X) = m$.

- (d) L'expression de ψ' montre que ψ' est positive sur $] \alpha, \beta[$, donc que ψ est croissante, et donc, comme précédemment, ψ admet en α (respectivement en β) une limite (finie ou infinie) $L_0(\alpha)$ (respectivement $L_0(\beta)$).

4. La fonction ℓ_a est définie sur $] \alpha, \beta[$, et de classe $\mathcal{C}^2$, comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

On a :

$$\forall t \in] \alpha, \beta[, \ell'_a(t) = a - \psi'(t).$$

- Si $L_1(\beta) \leq a$, alors, puisque ψ' est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$, et que $L_1(\beta)$ est sa limite en β , on en déduit que $\psi'(t) < a$ pour tout $t \in] \alpha, \beta[$. Ainsi,

$$\forall t \in] \alpha, \beta[, \quad \ell'_a(t) > 0,$$

Donc ℓ_a est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$:

x	α	β
$\ell'_a(x)$	+	
$\ell_a(x)$	$a\alpha - L_0(\alpha)$	$a\beta - L_0(\beta)$

- Si $L_1(\alpha) \geq a$, alors, puisque ψ' est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$, et que $L_1(\alpha)$ est sa limite en α , on en déduit que $\psi'(t) > a$ pour tout $t \in] \alpha, \beta[$. Ainsi,

$$\forall t \in] \alpha, \beta[, \quad \ell'_a(t) < 0,$$

Donc ℓ_a est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$:

x	α	β
$\ell'_a(x)$	+	
$\ell_a(x)$	$a\alpha - L_0(\alpha)$	$a\beta - L_0(\beta)$

- Si $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$, puisque ψ' est continue sur $] \alpha, \beta[$, de limites $L_1(\alpha)$ en α et $L_1(\beta)$ en β , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 tel que $\psi'(t_0) = 0$. Puisque ψ' est strictement croissante, ce t_0 est unique, et pour tout $t < t_0$, $\psi'(t) < a$, et pour tout $t > t_0$, $\psi'(t) > a$. On obtient donc le tableau suivant pour ℓ_a

x	α	t_0	β
$\ell'_a(x)$	+	0	-
$\ell_a(x)$	$a\alpha - L_0(\alpha)$	$h(a)$	$a\beta - L_0(\beta)$

5. Pour tout a réel, on pose : $h(a) = \sup_{t \in] \alpha, \beta[} \ell_a(t)$. On suppose désormais que $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.

D'après ce qui précède, t_0 est tel que $\psi'(t_0) = a$, et ψ' étant strictement croissante, donc bijective sur son image, on peut écrire $t_0 = (\psi')^{-1}(a)$. Ainsi, d'après le tableau de variations correspondant au cas $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$,

$$h(a) = \ell_a(t_0) = \ell_a((\psi')^{-1}(a)) = a(\psi')^{-1}(a) - \psi((\psi')^{-1}(a)).$$

6. On a par hypothèse $O \in] \alpha, \beta[$, et de plus,

$$\psi'(0) = \frac{L'_X(0)}{L_X(0)} = \frac{m}{1} = m,$$

d'après la question 1(c) pour $L'_X(0)$, et puisque f est une densité, pour $L_X(0)$. Ainsi, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires pour ψ' , comme plus haut,

- si $a > m$, $\psi'(0) - a$ et $L_1(\beta) - a$ n'ont pas même signe, donc il existe une valeur $c \in]0, \beta[$ telle que $\psi'(c) = a$, et par unicité de t_0 , $c = t_0$. Ainsi, ℓ_a atteint son maximum sur $]0, \beta[$, donc

$$h(a) = \sup_{t \in]0, \beta[} (at - \psi(t)).$$

- Si $a < m$, de même, ψ' prend la valeur a sur l'intervalle $]\alpha, 0[$, et ceci forcément au point t_0 , donc $t_0 \in]\alpha, 0[$, puis

$$h(a) = \sup_{t \in]\alpha, 0[} (at - \psi(t)).$$

7. Supposons $a > m$. D'après la question II-2(b), appliquée à $s = nt_0 > 0$ (car $t_0 > 0$ d'après la question précédente, dans ce cas),

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} \left(\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,$$

et, avec les notations du IV,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} \left(L_X\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = e^{-as} e^{n \ln L_X\left(\frac{s}{n}\right)} = e^{-n(at_0 - \psi(t_0))} = e^{-n(\ell_a(t_0))} = e^{-nh(a)}$$

De la même façon, si $a < m$, en utilisant la question II-3(b) appliquée à $s = nt_0$, qui est strictement négatif dans ce cas, on obtient :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(a)}$$

8. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $m - \varepsilon < m$ et $m + \varepsilon > m$, en appliquant la question précédente aux deux valeurs $a = m - \varepsilon$ et $a = m + \varepsilon$, on obtient :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq m - \varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq e^{-nh(m-\varepsilon)} + e^{-nh(m+\varepsilon)} \leq 2e^{-n \min(h(m-\varepsilon), h(m+\varepsilon))}.$$