Correction de l'Interrogation n° 1

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et f un endomorphisme de E.
   - On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$, ou, de manière équivalente, si $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.
   - On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si x est non nul et $f(x) = \lambda x$.
   - Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$.
2. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f.
   Soit, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k}$ est directe..
   La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie, puisqu'il n'y a qu'un espace dans la somme.
   Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai. Alors, soit $x \in E_{\lambda_{k+1}} \cap (E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k})$. Alors, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, \dots, x_k \in E_{\lambda_k}$ tels que
   $$x = x_1 + \cdots + x_k.$$
   L'application f étant linéaire, et par définition des sous-espaces propres, il vient :
   $$f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_k) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k.$$
   D'autre part, puisque $x \in E_{\lambda_{k+1}}$, on a aussi
   $$f(x) = \lambda_{k+1} x = \lambda_{k+1}(x_1 + \cdots + x_k).$$
   De ces deux expressions, on déduit :
   $$(\lambda_{k+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)x_k = 0$$
   Or, chaque $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i$ est dans E_{λ_i}, et la somme des E_{λ_i}, $i \in [\![1, k]\!]$, étant directe, cette expression ne peut être nulle que si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i = 0$, et donc $x_i = 0$, puisque $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$. Ainsi, $x = 0$.
   On en déduit que $E_{\lambda_{k+1}} \cap E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{l_k} = \{0\}$, ainsi, la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_{k+1}}$ est directe.
   Par conséquent, $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ entraîne $\mathcal{P}(k+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.
3. Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si
   $$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \dim E_\lambda = \dim E.$$
   En particulier, si f n'a qu'une valeur propre λ, f est diagonalisable si et seulement si $\dim E_\lambda = \dim E$, donc si $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) = E$, donc si $f = \lambda \mathrm{id}$. Ainsi, si f n'a qu'un valeur propre, f est diagonalisable si et seulement si f est une homothétie.
4. Vrai ou faux ? (Corriger en cas d'erreur)
   (a) *Soit f un endomorphisme de E. Alors, si f est injectif, f est un automorphisme.*
   FAUX ! Il faut que E soit de dimension finie.
   (b) *La somme $E + F + G$ est directe si et seulement si $E \cap F = F \cap G = \{0\}$.*
   FAUX ! Il faut $E \cap F = \{0\}$ et $G \cap (E + F) = \{0\}$, ce qui est un peu plus fort.
   (c) *Il n'est pas nécessaire que F soit de dimension finie pour utiliser le théorème du rang sur une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
   VRAI
   (d) *Si p est un polynôme annulateur de u,* $\mathrm{rac}(P) = \mathrm{Spec}(u)$.
   FAUX ! On n'a qu'une inclusion $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathrm{rac}(P)$.
5. Les colonnes de la matrice C vérifient la relation $C_1 = 2C_2 - 2C_3$. Ainsi, elles ne forment pas une famille libre. Donc $\mathrm{rg}(C) \leqslant 2$. De plus, les deux premières colonnes sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}\, C \geqslant 2$. Par conséquent, $\mathrm{rg}(C) = 2$.
   Le rang d'une matrice est au plus égal à son nombre de colonnes et à son nombre de lignes. Ainsi, $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ et $\mathrm{rg}(B) \leqslant 2$. De plus, puisque $C = AB$, on a $\mathrm{rg}(A) \geqslant \mathrm{rg}(C) = 2$, et $\mathrm{rg}(B) \geqslant \mathrm{rg}(C) = 2$ (multiplier par une matrice ne peut pas augmenter le rang). Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.
6. Je commence par une première remarque : u possédant n valeurs propres, n étant la dimension de E, u est diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1. Si on note $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les n valeurs propres, on a donc
   $$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}.$$

- Supposons que $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v = v \circ u$. Soit alors x un vecteur propre de u, associé à une valeur propre λ. On a alors :
$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$
Ainsi, $v(x) \in E_l$. Or, d'après la remarque préliminaire, E_λ est de dimension 1. Ainsi, $v(x)$ et x sont colinéaires, et comme $x \neq 0$, il existe μ tel que $v(x) = \mu x$. Ainsi, x (non nul) est un vecteur propre de v, associé à la valeur propre μ.
- Réciproquement, supposons que tout vecteur propre de u soit vecteur propre de v. Soit x dans E. Comme
$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}.$$
, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, x_n \in E_{\lambda_n}$ tels que
$$x = x_1 + \cdots + x_n.$$
Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i, s'il est non nul, est un vecteur propre de u, donc aussi de v, associé à une certaine valeur propre μ_i, et donc $v(x_i) = \mu_i x_i$. Une telle relation est vraie aussi si $x_i = 0$, pour n'importe quelle valeur de μ_i. Alors
$$v(u(x_i)) = v(\lambda_i x_i) = \lambda_i v(x_i) = \lambda_i \mu_i x_i \qquad \text{et} \qquad u(v(x_i)) = u(\mu_i x_i) = \mu_i u(x_i) = \mu_i \lambda_i x_i.$$
Ainsi, $v(u(x_i)) = u(v(x_i))$. Par conséquent,
$$v \circ u(x) = \sum_{i=1}^{n} v(u(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} u(v(x_i)) = u \circ v(x_1 + \cdots + x_n) = u \circ v(x).$$
Cette relation étant vraie pour tout $x \in E$, $v \circ u = u \circ v$.

7. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $M_1 - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\det(M_1 - \lambda I_2) = 0$. Or
$$\det(M_1 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$
Ainsi, $\mathrm{Spec}(M_1) = \{-2, -1\}$. Comme M_1, matrice d'ordre 2, admet 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. De plus E_{-1} et E_{-2} sont de dimension 1. Or :
   - $M_1 + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + 2C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_{-1}$, et comme E_{-1} est de dimension 1, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.
   - $M_1 + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-2}$, et comme E_{-2} est de dimension 1, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base.

   Ainsi, la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de diagonalisation, et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a la relation $M_1 = PDP^{-1}$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $M_2 - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\det(M_2 - \lambda I_2) = 0$. Or
$$\det(M_2 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 = (\lambda-2)^2.$$
Ainsi, M_2 admet pour unique valeur propre 2. Comme M_2 n'est pas la matrice d'une homothétie, on en déduit que M_2 n'est pas diagonalisable.

   (c) Effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $M_3 - \lambda I_3$.
$$M_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_3$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-2 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda^2+2\lambda-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix} \longrightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda-2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$
La matrice $M_3 - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement la matrice A_l est non inversible. Or cette matrice est triangulaire supérieure, donc elle est non inversible si et seulement si un de ses coefficients s'annule, donc si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(M_3) = \{0, 2\}$. De plus
   - $\mathrm{rg}\, A_0 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E_0 = 3 - 2 = 1$;
   - $\mathrm{rg}\, A_2 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2$, donc $\dim E_2 = 3 - 2 = 1$;

   Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_2 \neq 3$, donc M_3 n'est pas diagonalisable.