Devoir Maison n° 10 – Probabilités, fonctions de plusieurs variables

Exercice – *Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. (a) *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.*
   (b) *Calculer les dérivées premières et secondes de f.*
2. (a) *Déterminer le seul point critique $(a_1, \dots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.*
   (b) *Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et J_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.*
3. (a) *Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.*
   (b) *Calculer le produit $J_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.*
   (c) *À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.*
4. (a) *Montrer que pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ no nul, on a ${}^tHA_nH > 0$.*
   (b) *En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, \dots, a_n)$, et que ce minimum est égal à $-\frac{n}{4(n+1)}$.*

Problème – (HEC 1998)
(Fin du problème du DS 7 ; les parties 2, 3 et 4 sont obligatoires pour tous. Reprenez la partie préliminaire et la partie I si vous ne les avez pas faites en DS)

Notations
Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les variables aléatoires considérées dans chaque partie du problème sont des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
X étant une variable aléatoire admettant des moments d'ordre 1 et 2, $E(X)$ désigne l'espérance de X et $V(X)$ sa variance.
Tous les couples (X, Y) de variables aléatoires à densité considérés dans ce problème sont tels que X et Y admettent des moments d'ordre 1 et 2, et le produit XY est une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 1. On définit alors la covariance de X et Y par : $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
On admet alors que cette covariance vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\operatorname{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \operatorname{cov}(X, Z) + \beta \operatorname{cov}(Y, Z)$

(ii) $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$

(iii) $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{V(X)V(Y)}$

(iv) Si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$,

où α et β sont des réels, X, Y et Z des variables à densité.
Ces propriétés ne doivent pas être démontrées

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendements à un an de ces actifs, exprimés en pourcentage, sont des variables aléatoires $R_1, R_2, \ldots, R_n$ admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.
Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, x_i est un réel positif ou nul et tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif A_i. Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1, la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3, le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un portefeuille donné, le rendement (en pourcentage) de ce portefeuille est la variable aléatoire $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.
Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement R est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

Préliminaires

On considère le portefeuille $Q = (x_1, \ldots, x_n)$ et son rendement $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$. On rappelle que la variance de R est :

$$V(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j).$$

1. On suppose, dans un programme Pascal, avoir défini :

```
Const n=5;
type Tab= Array[1..n] of real;
var A: array[1..n,1..n] of real;
```

   où `A[i,j]` représente $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$.

   (a) Quel est l'intérêt de la déclaration de la constante n ? du type `Tab` ?

   (b) Écrire une fonction V de type `real`, de paramètre le protefeuille Q de type `Tab`, qui renvoie la valeur de $V(R)$.

2. On considère l'ensemble $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.\}$. On admet que H est fermé.

   On définit sur $\mathbb{R}^n$ la fonction F :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j).$$

   Montrer que F admet un minimum sur H.

La suite du problème consiste à déterminer ce minimum et les points de H où ce minimum est atteint, pour répondre ainsi à la demande du gestionnaire prudent.

Partie I –

Pour cette partie, l'entier n vaut 2, et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y. On suppose : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$, $\operatorname{cov}(X, Y) = c$, où c est un réel donné.
Pour un réel a de $[0, 1]$, on considère le portefeuille $(a, 1 - a)$ dont le rendement est la variable aléatoire $R = aX + (1 - a)Y$.

1. Montrer que l'on a : $|c| \leqslant 6$.

2. (a) Montrer que l'on a : $V(R) = (15 - 2c)a^2 + 2(c - 3)a + 3$.

(b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $h(x) = (15 - 2c)x^2 + 2(c-3)x + 3$.
Étudier les variations de h sur $[0,1]$, en distinguant les deux cas : $c \in [-6,3]$ et $c \in [3,6]$.
Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale. On déterminera ce portefeuille en fonction de c.

3. (a) On suppose $c = -6$. Déterminer le portefeuille dont le rendement R est de variance minimale, et cette variance minimale. Que peut-on dire de la variable aléatoire R dans ce cas ?
   (b) On suppose que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale.
4. *On suppose dans cette question que X et Y sont des variables gaussiennes indépendantes, X de moyenne égale à 6 et de variance égale à 12, Y de moyenne égale à 3, et de variance égale à 3.*
   Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Quelle est la loi de R ? Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4. (On donne $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \simeq 0.60$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).
5. *On suppose dans cette question que les variables à densité X et Y sont indépendantes. On suppose de plus que X suit la loi uniforme sur $[0,12]$ et que Y suit la loi uniforme sur $[0,6]$.*
   (a) Donner les valeurs des espérances de ces variables aléatoires, et vérifier : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$.
   (b) Déterminer la loi de la variable $4Y$, puis la densité de la variable $X + 4Y$. Tracer le graphe de cette densité.
   (c) Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.

Partie II –

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z. On suppose de plus : $V(X) = 2$, $V(Y) = V(Z) = 6$, $\operatorname{cov}(X,Y) = -1$, $\operatorname{cov}(X,Z) = 2$ et $\operatorname{cov}(Y,Z) = 1$.
On considère le portefeuille (x,y,z) dont le rendement est la variable

$$R = xX + yY + zZ.$$

La fonction f, l'ensemble K et l'ensemble K_0 sont définis comme suit :
- *pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6$,*
- $K = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x + y \leqslant 1\}$,
- $K_0 = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x + y < 1\}$.

On admet que K_0 est ouvert.

1. Montrer que le problème du gestionnaire revient à déterminer le minimum de f sur K. Dessiner le domaine K.
2. (a) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$, atteint au point (x_0, y_0) que l'on déterminera.
   (b) En déduire que f n'admet par de minimum sur K_0
3. (a) On pose $K_1 = \{(0,y),\ y \in [0,1]\}$, $K_2 = \{(x,0),\ x \in [0,1]\}$ et $K_3 = \{(x, 1-x), x \in [0,1]\}$.
   Déterminer les minimums de f respectivement sur K_1, K_2 et K_3.
   (b) En déduire l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

Partie III –

Dans cette partie, n vaut 3, et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z.

1. On suppose :

$$V(X) = V(Y) = V(Z) = 1, \qquad \operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,Z) = \operatorname{cov}(Z,X) = c,$$

où c est un réel donné.

(a) Calculer $V(X+Y+Z)$. Montrer que l'on a : $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]\!]$.

(b) On suppose $c \neq 1$. On considère un portefeuille (x, y, z) de rendement R.

Montrer que l'on a :

$$V(R) = (1-c)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{1+2c}{3}.$$

Déterminer le portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

2. Soit A, B et C des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. On suppose que les variables X, Y et Z vérifient

$$X = B + C, \qquad Y = A + C + 1 \qquad Z = A + B + 2.$$

(a) Déterminer les esérances, variances et covariances des variables X, Y et Z.

(b) Montrer que le portefeuille de variance minimale est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(c) Déterminer la loi de $A+B+C$. En déduire la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 5.

Partie IV –

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note M la matrice de covariance de $R_1, \ldots, R_n$. On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices ayant n lignes et une colonne.

1. On considère un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et la variable aléatoire $T = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.

   Vérifier que l'on a $V(T) = {}^tUMU$.

2. (a) Montrer que M est diagonalisable

   (b) À l'aide de la question 1, montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

3. On suppose M inversible. Pour tout (U, W) de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on pose :

$$\varphi(U, W) = {}^tUMW.$$

   (a) Montrer que si ${}^tUMU = 0$, alors $U = 0$.

   (b) Montrer que φ est un produit scalaire. On note N la norme associée à ce produit scalaire.

   (c) Montrer que, pour tout (U, W) de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$,

$$\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[(N(U))^2 + (N(W))^2\right] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right)\right]^2.$$

   (d) En déduire l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale (l'existence ayant été montrée dans le préliminaire).