Lycée La Bruyère, Versailles — Pour mercredi 10 décembre 2008.
ECS 2 – Mathématiques

Devoir Maison n° 6 – Intégrales impropres

Le but de ce problème est l'étude de certaines intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}$.

Partie I – Étude de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

1. **Nature de I**
   (a) Montrer que I est convergente. (On pourra faire une intégration par parties)
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$.
   (c) En déduire que I n'est pas absolument convergente.
2. **Valeur de I (première méthode)**
   (a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \, \mathrm{d}t$.
      i. En utilisant une formule de trigonométrie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.
      ii. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) (Lemme de Lebesgue) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $J_n = \int_a^b f(t)\sin(nt) \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   Indication : intégration par parties
   (c) Montrer que l'application définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ peut être prolongée par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (d) En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.
3. **Valeur de I (deuxième méthode)**
   On admet dans cette question le théorème de Fubini pour les intégrales : Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$:
   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$
   (a) Montrer que pour tout $u > 0$, et tout $x > u$, $\int_0^u \sin x \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}y = \frac{\sin x}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu})$.
   (b) À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer, pour tout $y > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^u \sin x \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}x$.
   (c) En déduire que pour tout $u > 0$, on a :
   $$\int_0^u \frac{\sin x}{x}(1 - \mathrm{e}^{-xu}) \, \mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1 - \mathrm{e}^{-yu}(\cos u + y \sin u)}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y.$$
   (d) En faisant tendre u vers $+\infty$, en déduire la valeur de I.
   On justifiera de manière très précise tous les passages à la limite.
4. **Estimation du reste**
   En adaptant la méthode de la question 1(a), montrer que
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Partie II – Étude de $I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 \frac{\sin^\alpha t}{t^\beta}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$

1. **Un exemple**

   En vous inspirant des méthodes de la partie I, déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.

2. Discutez suivant la valeur de (α,β) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ de la nature de $J_{\alpha,\beta} = \int_0^1 \frac{\sin^\alpha t}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$.

3. Soit α un entier positif impair.

   (a) En remarquant que $t \mapsto \sin^\alpha t$ est périodique et impaire, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin^\alpha(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

   (b) Soit F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^x \sin^\alpha t\ \mathrm{d}t$. Montrer que F est bornée.

   (c) En déduire, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, que $K_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^\alpha t}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$ converge.
   Indication : intégration par parties, en utilisant F

   (d) Montrer que la convergence est absolue si $\beta > 1$

4. Soit α un entier positif pair.

   (a) Montrer que si $\beta > 1$, $K_{\alpha,\beta}$ est convergente.

   (b) Supposons que $\beta \leqslant 1$.

      i. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right]$, $\sin^\alpha t \geqslant \frac{1}{2^\alpha}$.

      ii. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, un minorant de $\int_{\frac{\pi}{6}+k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+k\pi} \frac{\sin^\alpha t}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$

      iii. À l'aide d'un développement limité, montrer qu'il existe γ non nul tel que le minorant de $\int_{\frac{\pi}{6}+k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+k\pi} \frac{\sin^\alpha t}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$ trouvé dans la question précédente soit équivalent en $+\infty$ à $\frac{\gamma}{k^\beta}$.

      iv. En déduire que $K_{\alpha,\beta}$ diverge.

5. Donner, suivant les valeurs de α et β, la nature de $I_{\alpha,\beta}$.