Devoir surveillé n° 1 – 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice – (D'après ESCL 1993)

Soit E un espace vectoriel réel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et id *l'endomorphisme identité de E.*
Pour tout φ de $\mathcal{L}(E)$, on note $\varphi^0 = \mathrm{id}$, $\varphi^1 = \varphi$, et pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.

Soient :
- *p et q deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = \mathrm{id}$,*
- *a et b deux réels distincts et non nuls*
- *f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$.*

1. (a) Montrer que $(f - a \cdot \mathrm{id}) \circ (f - b \cdot \mathrm{id}) = (f - b \cdot \mathrm{id}) \circ (f - a\mathrm{id}) = 0$.
   (b) Montrer que $f - a \cdot \mathrm{id} = (b - a)q$ et que $f - b \cdot \mathrm{id} = (a - b)p$.
   (c) En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$
   (d) Montrer que p et q sont des projecteurs de E.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a^n p + b^n q$.
3. (a) Calculer $f \circ \left(\frac{1}{a} \cdot p + \frac{1}{b} \cdot q\right)$.
   (b) Montrer que f est un isomorphisme, et exprimer f^{-1} en fonction de p, q, a et b.
   (c) Exprimer $(f^{-1})^n$ en fonction de p, q, a, b et n.
4. (a) Déterminer l'ensemble $S = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ des valeurs propres de f
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2\mathrm{id}) = E$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Problème 1 – (ESCL 2001) – Endomorphismes cycliques

Rappel

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes, qui sont :

$$1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}, \dots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\theta}, \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- *On note id_E l'application identique de E.*
- *Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.*
- *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est* cyclique d'ordre p *s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :*
  - *(i)* $f^p(x_0) = x_0$
  - *(ii) la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E*
  - *(iii) la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.*

  La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle *de f.*

Partie I – Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E, et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4, et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$.
4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Partie II – Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p \geqslant n$
2. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.
3. *On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille*

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$$

   est libre.

   (a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

(b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$.

(c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$ est une base de E.

4. *On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que :*

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

(a) *On considère l'endomorphisme g de E défini par :*

$$g = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.

En déduire : $f^n = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

(b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base

$$(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$$

à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

(c) Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \geqslant n - 1$.

En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. *On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim E = n$). Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f.*

(a) Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

(b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

(c) Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Problème 2 –

Le but de ce problème est d'étudier une décomposition en produit de deux matrices d'une certaine matrice carrée d'ordre 3.

Soit $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C.*

Partie I – Sous-espaces définis par f

1. Quel est le rang de C ? de f ? Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Construire, à l'aide des bases de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$, une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on exprimera la matrice de f. Vérifier que cette matrice est diagonale.
6. Justifier que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f - 9\mathrm{id})$.

Partie II – Étude d'une décomposition de C en produit de deux matrices

1. (a) En exprimant la première ligne de C comme combinaison linéaire de ses deux autres lignes, trouver deux matrices $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $A \cdot B = C$.

   (b) Calculer BA.

Dans la fin du problème, A et B désignent deux matrices quelconques respectivement dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, vérifiant $AB = C$. On désigne par g et h les applications linéaires dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ canoniquement associées respectivement à A et B. On cherche à généraliser le résultat de la question $III - 1b$.

2. **Étude de l'inversibilité de BA.**

   (a) Justifier que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, f$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(h \circ g) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

   (d) En déduire que $\mathrm{rg}(h \circ g) = 2$ puis que BA est inversible.

3. **Calcul de BA**

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(h \circ g - 9\mathrm{id})$ si et seulement si $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - 9\mathrm{id})$.

   (b) En déduire que $BA = 9I_2$.