Devoir surveillé n° 2 – 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (EDHEC 2003)

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note tA la matrice transposée de A , et $\text{tr}(A)$ la trace de A , c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de A . On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice J , élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on associe le réel $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

2. Montrer que (I, J, J^2) est une famille orthogonale.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, J^2) .
 - (a) Déterminer une base orthonormale de E , notée (K_0, K_1, K_2) , telle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i (avec bien sûr $J^0 = I$).
 - (b) Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté $a_{i,j}$.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, déterminer $\langle K_i, A \rangle$ en fonction de certains des éléments de A .
 - (c) On note p la projection orthogonale sur E . Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0, K_1, K_2 et de certains éléments de A .
 - (d) En déduire une base de $\text{Ker } p$.

Exercice 2 – (d’après EDHEC 2002)

Dans tout l’exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note Id l’application identique de $\mathbb{R}^n$.

1. Étude des symétries de $\mathbb{R}^n$

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, non réduits au seul vecteur nul, et supplémentaires, c’est-à-dire tels que $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$.

On appelle symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 , l’endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ tel que $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$) par $s(x) = x_1 - x_2$.

Dans les trois premières questions, on considère une telle symétrie, notée s .

- (a)
 - i. Montrer que : $\forall x \in F_1, s(x) = x$.
 - ii. En déduire que $\text{Ker}(s - \text{Id}) = F_1$.
- (b)
 - i. Montrer que : $\forall x \in F_2, s(x) = -x$.
 - ii. En déduire que $\text{Ker}(s + \text{Id}) = F_2$.
- (c) Utiliser les questions précédentes pour montrer que s est diagonalisable, et donner une forme possible de la matrice de s relativement à une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s .
- (d) Réciproquement, montrer qu’une telle matrice est la matrice d’une symétrie.
- (e) Montrer que s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}$.

2. Symétries orthogonales

On considère maintenant $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle dans lequel le produit scalaire canonique est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non réduit au seul vecteur nul, et différent de E . Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F (c’est-à-dire la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$), et p la projection orthogonale sur F .

- (a) Montrer que $s = 2p - \text{Id}$.
- (b) En déduire, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base orthonormale de F , une expression de $s(x)$ en fonction de x , des vecteurs u_i , et des scalaires $\langle x, u_i \rangle$.
- (c) Dans cette question, on suppose que $n = 3$, et que F est la plan d’équation $x - 2y + 3z = 0$.
 - i. Déterminer une base orthonormale de F .
 - ii. En déduire la matrice N relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport à F .
- (d) Mêmes questions avec $n = 4$ et F l’hyperplan engendré par les vecteurs $(2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ et $(3, 0, 0, 1)$.

3. Programmation

On se place cette fois-ci dans $\mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique, toujours noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- (a) Que faut-il rajouter dans l’entête d’un programme en Pascal pour pouvoir passer un vecteur de $\mathbb{R}^4$, sous la forme d’une matrice d’une ligne et 4 colonnes, en paramètre d’une procédure ou d’une fonction ?
- (b) Écrire une fonction prenant en paramètre deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^4$ et calculant $\langle X, Y \rangle$.
- (c) Écrire une fonction prenant en paramètre un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ et calculant sa norme $\|X\|$.
- (d) Écrire une procédure prenant en paramètre une famille de trois vecteurs (X, Y, Z) de $\mathbb{R}^4$ (famille que l’on supposera libre), et transformant cette famille en une famille orthonormale engendrant le même sous-espace.
- (e) Écrire une procédure prenant en paramètre trois vecteurs X, Y, Z de $\mathbb{R}^4$ et calculant dans un quatrième paramètre dont on précisera le type la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l’hyperplan engendré par la famille (X, Y, Z) (que l’on supposera libre)

Problème – (EML 2002)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

Partie I – Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E . On considère l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère E muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

- (a) Vérifier : $\forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
 - (b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E .
3. Soient $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.
 - (a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 , et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
 - (b) Déterminer une base de $\text{Ker } u$.
 - (c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , et un nombre réel a tel que la matrice associée à u

relativement à cette base soit
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II – Caractérisation des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E .

1. Pour tout couple (x, y) de E^2 , développer $\langle u(x+y), x+y \rangle$.
En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.
 - (a) Montrer : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.
 - (b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^t M = -M$.

Partie III – Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E . On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question II-1.

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u , alors $\lambda = 0$.
2. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E .
En déduire que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$.
3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E (c'est-à-dire vérifiant pour tout (x, y) de E^2 , $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$) et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.
4. (a) Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle (on admettra que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable).

Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

(b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u .

(c) Montrer que $F^\perp$ est stable par u .

On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par $\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle$ (restriction du produit scalaire de E).

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp, u_1(x) = u(x)$.

(d) Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que l'on a :

$$\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1.$$

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme symétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E .

Partie IV – Application

Dans cette dernière partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E .

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E . Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2 .
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$