

Concours blanc n° 1 – Épreuve n° 1

Épreuve type HEC

Avertissement !

Cette épreuve est imposée aux 10 premiers élèves du classement provisoire.

Cette épreuve est interdite aux 10 derniers élèves du classement provisoire.

Les autres élèves ont le choix entre cette épreuve et l'épreuve de type ESC.

Toute copie ne respectant pas ces contraintes de choix ne sera pas corrigée.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème – (ESCP 1997)

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de Hermite qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème.

On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n) y compris le polynôme nul.

Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x .

Enfin on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Partie I – Trois résultats utiles par la suite

1. (a) Pour tout entier naturel n , justifier la convergence de l'intégrale

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

- (b) Établir, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité : $I_n = (n-1)I_{n-2}$

- (c) Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

- (d) Pour toute fonction polynomiale P , justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

2. On rappelle que si une suite de terme général v_n est telle que les deux sous-suites de termes généraux v_{2n} et v_{2n+1} convergent vers le même réel ℓ , alors la suite (v_n) est elle-même convergente de limite ℓ .

Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{C^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$.

- (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Montrer que la série de terme général $u_{2k} + u_{2k+1}$ (où $k \in \mathbb{N}$) converge et donner sa somme.
- (c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle il existe un réel positif K tel que, pour tout entier n :

$$\max_{t \in [-a, a]} |g^{(n)}(t)| \leq \frac{K^n n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$$

- (a) Montrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$.
- (b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n.$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

Partie II – Les polynômes de Hermite

1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x) Q(x) dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Ainsi, si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

2. À l'aide de la base $(1, X, X^2, X^3)$, construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ formée de polynômes dont le coefficient de plus haut degré est 1.

Soit g l'application définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pour tout entier naturel n , on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x),$$

où, selon l'usage, $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée n -ième de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).

3. (a) Pour tout réel x , calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \tag{1}$$

$$H'_n = nH_{n-1} \tag{2}$$

Pour établir (1), on pourra remarquer que $g^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x)$, où $h : x \mapsto -xg(x)$.

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera en fonction de n , le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.

4. Programmation

On dispose du type `Poly = array[0..20] of integer` ;

On nommera de la même façon un polynôme de degré au plus 20 et la variable de type `Poly` obtenue en stockant dans la case numéro k , $0 \leq k \leq 20$, le coefficient de X^k du dit polynôme.

- (a) Écrire une procédure PASCAL nommée MULTIX, qui prend en paramètre deux variables P et Q de type `Poly` et qui stocke dans Q les coefficients du polynôme XP , P étant un polynôme de degré au plus 19.
- (b) À l'aide de (1), écrire une procédure PASCAL nommée HERMITE, qui prend en paramètre un entier n et une variable H de type `Poly`, et qui stocke les coefficients de H_n dans la variable H , n étant supposé pris dans $\llbracket 2, 20 \rrbracket$.

Partie III – $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. (a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0.$$

De même, on montrerait, et **on admet** que $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\langle H_n, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pour n non nul, on utilisera pour ce faire la définition de H_n .

- (c) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. En justifiant au préalable que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) g^{(n)}(x) dx,$$

et à l'aide d'une intégration par parties que l'on effectuera avec soin, montrer que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle.$$

En déduire que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n \rangle$?

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k ; que vaut $\langle H_{k+1}, R \rangle$?
- (b) Soit n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n$, et P un polynôme de degré au plus k . Établir l'égalité :

$$\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2,$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. (On pourra calculer $\langle H_{k+1}, Q - P \rangle$.)

Quel est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

- (c) On note $(G_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base $(X^k)_{0 \leq k \leq n+1}$. Pour tout k tel que $0 \leq k \leq n+1$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \dots, H_{n+1}$.

Partie IV – Un développement en série de Hermite

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit P un polynôme de degré au plus n . Justifier l'égalité suivante :

$$P = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{H_k}{k!}.$$

2. Pour tout couple (b, c) de réels vérifiant $b \leq c$, on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout entier naturel n et tout $x \in [b, c]$:

$$\left| \frac{H_n(x)}{n!} \right| \leq \frac{K^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}.$$

- (a) Soit x un réel donné. À l'aide de I-2, établir, pour tout réel λ , la convergence de la série de terme général $\frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$.
- (b) Soit g_x (x étant toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par :

$$g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}.$$

Pour tout réel λ et tout entier naturel n , calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$ (dérivée n -ième par rapport à λ , à x fixé), en fonction de H_n .

Montrer que g_x vérifie les hypothèses de I-3, et en déduire que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n.$$

- (c) On note $\exp$ la fonction $x \mapsto e^x$. Pour tout entier naturel n , justifier rapidement la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n \rangle$ la valeur. Calculer $\langle \exp, H_n \rangle$ puis, pour tout réel x , conclure à l'égalité

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \frac{H_n(x)}{n!}.$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n \rangle$, on pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_{n-1} \rangle$.

Charles Hermite (Dieuze 1822 - Paris 1901) Mathématicien français. Auteur d'une théorie générale des fonctions elliptiques et abéliennes, il a aussi établi la transcendance du nombre e . (*Petit Larousse*)