Concours blanc n° 1 – Épreuve n° 1

Épreuve type ESC

Avertissement !

Cette épreuve est imposée aux 10 derniers élèves du classement provisoire.

Cette épreuve est interdite aux 10 premiers élèves du classement provisoire.

Les autres élèves ont le choix entre cette épreuve et l'épreuve de type HEC.

Toute copie ne respectant pas ces contraintes de choix ne sera pas corrigée.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés*.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (ESC 2002)

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général a_n^2 converge.
Dans cet énoncé on emploi la notation a pour désigner une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout réel non nul α, on considère la suite $u(\alpha)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$.
   Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E.

2. (a) Montrer que si a et b sont des éléments de E, alors la série de terme général a_nb_n est absolument convergente.

   (b) Soit φ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :
   $$\varphi((a,b)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n,$$
   pour toutes suites a et b de E.
   Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
   On notera $\langle a,b\rangle = \varphi((a,b))$, et $\|\cdot\|_2$ la norme associée à φ.

   (c) Montrer que, pour toutes suites a et b de E, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$.

   (d) Déterminer, pour tout réel α, la norme $\|u(\alpha)\|_2$ et pour tous réels α et β distincts, le produit scalaire $\langle u(\alpha), u(\beta)\rangle$.

(e) Déterminer une base orthogonale de l'espace vectoriel engendré par la famille $(u(1), u(2))$.

3. *Pour tout entier naturel k non nul, on définit :*
   - *F_k l'ensemble des suites réelles a telles que pour tout entier $n \geqslant k$, $a_n = 0$;*
   - *G_k l'ensemble des suites a de E telles que pour tout entier $n \leqslant k-1$, $a_n = 0$.*

   (a) Montrer que $F_k \subset E$ et que F_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k.

   (c) Montrer que G_k est un sous-espace vectoriel de E.

   (d) Soit a une suite de E. Montrer qu'il existe deux suites r et s telles que $r \in F_k$ et $s \in G_k$ et $a = r + s$.
   En déduire que F_k et G_k sont supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire φ.

   (e) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.
   Déterminer son projeté orthogonal sur F_k, pour le produit scalaire φ.

Exercice 2 – (ECS 2003) – Étude d'un jeu de type Memory

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose de deux jeux ***identiques*** *de n cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.*
Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

Partie I –

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu, formant ainsi une paire de cartes, mise de côté. On recommence n fois ce tirage, sans remise. On dispose alors de n paires de cartes. Ainsi, à chaque carte du premier jeu est associé une et une seule carte du deuxième jeu. On appelle résultat de cette expérience l'ensemble des paires ainsi formées. Ainsi, on ne tient pas compte de l'ordre de tirage

1. Quel est le nombre total de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?
3. Soit k un entier naturel de $[\![0, n-1]\!]$, et k paires d'animaux fixées arbitrairement.
   Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?
4. Montrer grâce à la formule du crible, que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée est égale à $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Écrire une fonction en PASCAL, prenant en paramètre un entier n et calculant la valeur de p_n.
   (On remarquera que p_n s'écrit sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, où la suite de réels (u_k) vérifie une relation de récurrence simple.)

Partie II –

On mélange maintenant les deux jeux dans une urne.
À chaque tour, on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes, on ne remet pas les cartes dans l'urne, sinon on les remet dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de tours nécessaires pour vider l'urne, en reconstituant ainsi les n paires de figurines d'animaux.

1. Déterminer la loi et l'espérance de la variable T_1.

2. Déterminer $T_n(\Omega)$ pour n supérieur ou égal à 2.
3. (a) En utilisant les événements

$$C_i \ : \ \text{« lors du } i\text{-ième tour, une paire d'animaux est reconstituée »},$$

montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

(b) Montrer que T_2 admet une espérance, et la calculer.
4. (a) Déterminer les probabilités $P(T_3 = 3)$, $P(T_3 = 4)$.
En utilisant le système complet $(C_1, \overline{C_1})$, déterminer $P(T_3 = 5)$.
(b) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour $k \geqslant n-1$,

$$P(T_n = k+1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} P(T_{n-1} = k) + \frac{\binom{2n}{2} - n}{\binom{2n}{2}} P(T_n = k).$$

(c) *On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul n, T_n admet une espérance.*
Montrer, en multipliant l'expression précédente par k et en sommant de $k = n-1$ à l'infini que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1.$$

En déduire pour tout entier naturel n non nul une expression de $E(T_n)$ en fonction de n.

Exercice 3 – (extrait de ESCP 1997) – Polynômes de Hermite

Soit g l'application définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Pour tout entier naturel n, on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g^{(n)}(x),$$

où, selon l'usage, $f^{(n)}(x)$ désigne la valeur en x de la dérivée n-ième de f (en particulier $f^{(0)}(x) = f(x)$).
On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

1. (a) Pour tout réel x, calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les relations

$$H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \tag{1}$$

$$H'_n = nH_{n-1} \tag{2}$$

Pour établir (1), on pourra remarquer que $g^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x)$, où $h : x \mapsto -xg(x)$ et utiliser la formule de Leibniz. Pour établir (2), on pourra partir de la définition de H_n.
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale dont on précisera en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient de plus haut degré.
2. (a) Pour toute fonction polynomiale P, justifier la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que l'application

$$(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x)\ \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

Ainsi, si n est un entier naturel, la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

3. (a) Montrer que si P est un polynôme et n un entier naturel non nul, alors

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0.$$

(On pourra utiliser la définition de H_{n-1})

De même, on montrerait, et ***on admet*** *que* $\lim_{x\to-\infty} P(x)g^{(n-1)}(x) = 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\langle H_n, H_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x.$$

Pour n non nul, on utilisera pour ce faire la définition de H_n.

(c) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. En justifiant au préalable que :

$$\langle H_n, H_m\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)g^{(n)}(x)\ \mathrm{d}x,$$

et à l'aide d'une intégration par parties que l'on effectuera avec soin, montrer que :

$$\langle H_n, H_m\rangle = m\,\langle H_{n-1}, H_{m-1}\rangle\,.$$

En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $\langle H_n, H_n\rangle$?